RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 gennaio 1912.

P. Blaserna Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulle onde di canale.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

Fra le caratteristiche qualitative delle onde di canale spicca quella che fu per la prima volta segnalata da Leonardo colle parole seguenti (1): « L'impeto [cioè la propagazione della perturbazione superficiale] è molto più veloce che l'acqua; poichè *molte sono le volte* che l'onda fugge il luogo della sua creazione e l'acqua non si muove dal sito. A simiglianza dell'onda fatta il maggio nelle biade dal corso dei venti, che si vede correre l'onda per le campagne, e le biade non si muovono dal loro sito ».

A prima vista si sarebbe tratti ad interpretare con più moderno linguaggio il passo citato, assumendo che: Nel moto ondoso le singole particelle fluide oscillano intorno a posizioni medie, fisse nello spazio, senza dar luogo a traslazione d'insieme.

In realtà questa condizione è rispecchiata nelle onde rotazionali di Gerstner (2), nonchè nelle onde oscillatorie semplici di Airy (3). Ma già Stokes (4) ebbe a rilevare, studiando in seconda approssimazione le onde

(1) Cfr. *Raccolta d'autori italiani che trattano del moto dell'acqua*, t. X [Bologna, 1826], pag. 320.

(2) Cfr. per es. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, t. III (seconda edizione), pp. 494-501; ovvero Lamb, *Hydrodynamics* (terza edizione), pp. 395-398.

(3) Ibidem, pp. 472-473, o, rispettivamente, 347-353.

(4) Math. and phys. papers, vol. I, pp. 198, 207.

periodiche irrotazionali di tipo permanente, che esse sono di necessità accompagnate da un piccolo trasporto superficiale.

Lord Rayleigh provò poi, con una osservazione geometrica quanto mai suggestiva ed elegante, che, nel caso limite di una profondità infinita (1), il trasporto superficiale è una conseguenza inevitabile dell'assenza di rotazione molecolare, indipendente dalla condizione che la pressione sia costante sopra la superficie libera: si tratta perciò di cinematica (non di dinamica) del moto ondoso.

Comunque, rimane accertato che l'assoluta assenza di trasporto non può figurare fra i caratteri distintivi del moto ondoso. Ciò non contradice del resto all'originaria intuizione di Leonardo, dato l'inciso « *molte sono le volte* », che sembra anzi consigliare meno restrittiva interpretazione. Essa si concreta come segue: Se c'è un trasporto globale di massa, questo va esclusivamente attribuito alle disuguaglianze superficiali; gli strati profondi non vi apportano alcun contributo. Di qua la designazione di onde superficiali, attribuita da alcuni autori alle onde di cui si tratta.

Nella presente Nota mi propongo in primo luogo di dar veste analitica precisa all'anzidetta caratteristica di massa, e di ricavarne poi, come conseguenza necessaria della irrotazionalità, una espressione del flusso totale, che lascia immediatamente scorgere le proposizioni di Stokes e di Rayleigh, e le estende, contemplando canali di profondità comunque assegnata e onde pur qualunque (anche non periodiche) di tipo permanente. Ne deduco altresì una relazione generale fra elementi di media: forza viva per unità di lunghezza, livello medio, velocità di propagazione, portata relativa (quale cioè apparisce ad un osservatore collegato col profilo superiore dell'onda).

1. — Preliminari.

In un canale a fondo orizzontale e pareti verticali si propaghino, parallelamente alle sponde, onde di tipo permanente con velocità costante c.

Il fenomeno si può studiare in due dimensioni, considerando un generico piano verticale parallelo alle sponde. Riterremo che tutto abbia carattere

(1) Questa restrizione non è espressamente enunciata nel celebre scritto del Rayleigh *On waves* (Scientific papers, vol. I, pp. 263-264), ma rimane implicita nell'ammettere che il flusso, a profondità sufficiente, sia sensibilmente uniforme. Con ciò infatti si vengono a considerare costanti, lungo una stessa orizzontale, tanto la funzione di corrente ψ quanto la sua derivata normale. Ora, se non si dovesse intendere « orizzontale infinitamente profonda », avremmo una funzione ψ, la quale si mantiene costante, assieme alla sua derivata normale, sopra una retta ben determinata. Una tale funzione sarebbe di necessità lineare, e si tratterebbe di flusso uniforme, contro l'ipotesi che, almeno alla superficie libera, si riscontri un'effettiva perturbazione ondosa.

permanente rispetto ad assi Oxy animati dalla velocità stessa con cui avviene la propagazione [1].

Assumeremo l'asse Oy verticale verso l'alto, e l'asse Ox scorrente sul fondo, colla direzione positiva rivolta *in senso opposto* alla propagazione.

Rispetto a questi assi, il campo in cui si svolge il moto non varia col tempo: esso sarà a ritenersi una striscia indefinita L (cfr. la fig. 1), limitata inferiormente dall'orizzontale $y = 0$ (*fondo*), superiormente da una *linea libera* l, la quale, senza scostarsi troppo da una stessa orizzontale, può *a priori* assumere andamento comunque sinuoso ed irregolare. Analiticamente, c'è da supporre soltanto che l'ordinata $y(x)$ di l (finita, continua e derivabile) rimanga compresa fra due limiti *positivi*, al variare di x fra

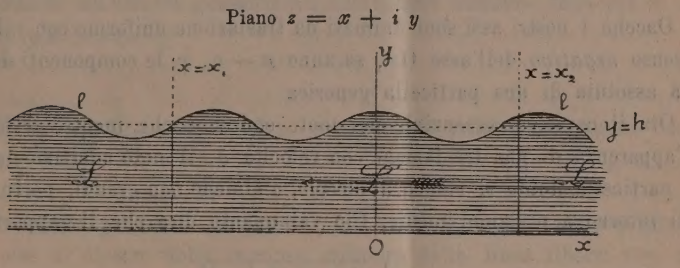


Fig 1.

$-\infty$ e $+\infty$. Va da sè che, se si tratta in particolare di onde periodiche, la funzione $y(x)$ ammette un periodo ben determinato λ (lunghezza d'onda).

Indicheremo con u e v le componenti della velocità *relativa* delle particelle liquide, rispetto al sistema Oxy: esse sono a ritenersi funzioni delle coordinate x, y dei punti del campo (e non del tempo t, attesa la stazionarietà del moto rispetto ai detti assi), continue, e finite ovunque (anche all'infinito).

Trattandosi di moto irrotazionale di un liquido (fluido incompressibile), saranno differenziali esatti

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy, \tag{1}$$

e

$$d\psi = -v\,dx + u\,dy. \tag{2}$$

Il campo L essendo semplicemente connesso, le due funzioni φ e ψ (potenziale di velocità e funzione di corrente) rimangono univocamente definite a meno di costanti additive, che fisseremo convenendo p. es. che sia $\varphi = \psi = 0$ nell'origine O.

[1] Si potrebbe limitarsi ad ammettere che il solo profilo superiore (pelo libero) si sposta rigidamente, con velocità c. Basta questo perchè un moto irrotazionale di fluido incompressibile risulti di necessità permanente.

Siccome tanto il fondo, quanto il pelo libero l costituiscono linee di flusso, sarà su entrambe $d\psi = 0$. La funzione ψ, che si annulla in O, ha dunque il valore zero su tutto l'asse delle ascisse, ed un valore, pure costante, che designerò con q, sulla linea l. Data la forma del campo L, ogni punto si può raggiungere dal fondo innalzandosi di un tratto finito (non superiore alla massima ordinata della linea libera). In base a ciò, segue immediatamente dalla (2) che ψ (nulla sul fondo) si mantiene finita, anche all'infinito. Non così φ: vedremo più innanzi quale sia il suo comportamento asintotico.

2. — Caratteristica cinematica.

Dacchè i nostri assi sono animati da traslazione uniforme con velocità c, nel senso *negativo* dell'asse Ox, saranno $u - c$, v le componenti della velocità assoluta di una particella generica.

Ora il carattere essenziale del moto ondoso è che, mentre il fenomeno ha l'apparenza di una traslazione con velocità c, il moto effettivo delle singole particelle fluide si riduce a piccole, o almeno non grandi, perturbazioni locali intorno a posizioni medie. Ciò val quanto dire che il rapporto

$$\beta = \frac{|\sqrt{(u-c)^2 + v^2}|}{c}$$

fra la velocità assoluta e la velocità di propagazione deve mantenersi piuttosto piccolo: dal punto di vista matematico basta ritenere $\beta < 1$, o, più precisamente, minore dell'unità il limite inferiore dei valori assunti da β in tutto il campo del moto.

Ne risulta in particolare che u deve essere dappertutto > 0. Pure positivo è quindi il valore di q, come risulta dalla (2), immaginando di integrare lungo una verticale, a partire dal fondo fino alla linea libera.

3. — Portata relativa e portata assoluta.

Prendendo la densità del liquido eguale ad 1, il flusso, *nel senso della propagazione* (cioè nella direzione negativa dell'sse Ox), attraverso un elemento dy di verticale (riferito all'unità di tempo e all'unità di larghezza del canale), vale manifestamente

$$-u\,dy,$$

se si considera la verticale collegata cogli assi Oxy; vale invece

$$(c-u)\,dy,$$

ove si tratti di una verticale fissa nello spazio.

Nel primo caso, la verticale stessa ha per equazione $x =$ costante; nel secondo $x = \xi + ct$ (dove ξ è una costante). Comunque, la portata totale si ha integrando, rispetto ad y, dal fondo fin sulla linea libera.

A norma della (2), lungo ogni verticale, $u\,dy = d\psi$, quindi la portata *relativa* è $-q$, e l'*assoluta*

$$Q = \int (c - u)\,dy = cy - q, \tag{3}$$

indicando y l'ordinata di l (in generale variabile col tempo) che corrisponde alla verticale fissa considerata. Se $y(x)$ è l'espressione dell'ordinata di l corrispondente all'ascissa generica x, nell'ultimo membro della (3), si deve intendere $y(\xi + ct)$.

4. — CARATTERISTICA DI MASSA: ASSENZA DI TRASPORTO NEGLI STRATI PROFONDI.

Chiamiamo *profondo* un punto o un tratto di canale sempre immersi, situati cioè al disotto della minima ordinata della linea libera. Ove sia ε un generico elemento profondo di verticale *fissa*, la caratteristica di massa consiste in questo [1]:

La quantità d'acqua che passa attraverso ε (in un senso determinato), durante un tempo comunque lungo, rimane sempre finita.

Valutiamo in primo luogo la quantità d'acqua in questione. Ove la si designi con m (considerandola come positiva nel senso della propagazione), e sia (t_1, t_2) l'intervallo di tempo che si vuol considerare, si avrà manifestamente [2]

$$m = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (c - u)\,dt. \tag{4}$$

La u sotto il segno si riferisce agli argomenti $x = \xi + ct$ e y, essendo ξ costante (ascissa dell'elemento ε contata a partire da un'origine fissa) e y pure costante (ordinata dello stesso elemento ε).

[1] Mi riferisco ad elementi verticali per comodità di espressione. Nello stesso modo si comportano elementi comunque orientati. La conclusione finale concernente φ potrebbe essere stabilita considerando elementi di direzione arbitraria (purchè soltanto non orizzontali).

[2] Si noti che, nell'attribuire ad un elemento ε la portata $(c - u)\,\varepsilon\,dt$, per tutti i dt dell'intervallo di tempo considerato, si sfrutta l'ipotesi che l'elemento sia profondo. Infatti, ove esso restasse per qualche po' al disopra della linea libera, bisognerebbe, nei tempuscoli corrispondenti, sostituire zero a $(c - u)\,\varepsilon\,dt$.

Introduciamo x al posto di t come variabile di integrazione, e rappresentiamo con x_1, x_2 i valori di x, che, a norma di $x = \xi + ct$, corrispondono rispettivamente a t_1, t_2. Tenuto conto che $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, si ha

$$m = \varepsilon \{c(x_2 - x_1) - [\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)]\},$$

e la circostanza che m deve rimanere finito, qualunque siano t_1, t_2 (e di conseguenza x_1, x_2), equivale, come tosto si riconosce, a quest'altra: La funzione

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - cx \tag{4}$$

si mantiene finita, anche al crescere indefinito di x, per tutti i valori di y inferiori alla minima ordinata della linea libera l. Quest'ultima restrizione si può togliere, ritenendo in definitiva $\Phi(x, y)$ *finita, anche all'infinito, in tutto il campo* L *del moto*. Per giustificarlo, basta pensare che, da un punto qualunque di L, si può raggiungere un punto profondo, scendendo verticalmente di un tratto finito (inferiore alla massima ordinata della linea libera). Il divario fra i valori di Φ in questi due punti non può superare il prodotto della differenza di livello per il limite superiore di

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = |v|,$$

che è per ipotesi finito, c. d. d.

5. — Introduzione delle variabili complesse.

Segue dal n. 1, ed è del resto notorio, che, posto

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ f = \varphi + i\psi, \\ w = u - iv, \end{cases} \tag{5}$$

f e w risultano funzioni della variabile complessa z, uniformi della striscia L, sussistendo l'identità

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{6}$$

Le premesse concernenti u, v assicurano che w è regolare in L e rimane ovunque (anche all'infinito) *finita e diversa da zero*. Quest'ultima circostanza segue dall'essere positivo il limite inferiore di u [n. 2].

Quanto ad f, il relativo comportamento risulta subito dall'osservare cho ψ rimane finita [n. 1], mentre φ differisce da cx per una $\Phi(x, y)$ pure ovunque finita [n. prec.].

Ne segue (cosa pur nota, che già altra volta [1]) ebbi occasione di richiamare con tutto dettaglio) che i valori presi da f in L riempiono, nel piano complesso $\varphi + i\psi$, la striscia S (fig. 2) compresa fra le rette $\psi = 0$, $\psi = q$, per modo che c'è corrispondenza biunivoca fra i due campi.

Mentre z percorre (nel senso delle x crescenti) il fondo, ovvero la linea libera l, f percorre (nel senso delle φ crescenti) l'asse reale $\psi = 0$, o rispettivamente la sua parallela $\psi = q$, essendo in particolare $f = 0$ per $z = 0$.

A punti all'infinito del campo L ($x = \pm\infty$) corrispondono punti pure all'infinito della striscia S (e dalla stessa banda, $\varphi = \pm\infty$).

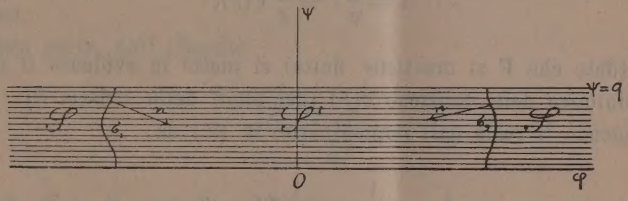


Fig. 2.

Ove si ponga

$$\Psi = \psi - cy, \tag{7}$$

$$F = \Phi + i\Psi, \tag{8}$$

le (4) e (7) si possono compendiare in

$$f(z) = cz + F, \tag{9}$$

da cui apparisce che F è funzione della variabile complessa z, ovunque finita nel campo L, anche al crescere indefinito di z.

Derivando e badando alla (6), si ha

$$w - c = \frac{dF}{dz}.$$

Il numero complesso del primo membro rappresenta manifestamente la *velocità assoluta* (in senso vettoriale). Ricordando il significato di β, ne desumiamo

$$\beta = \frac{1}{c}\left|\frac{dF}{dz}\right|. \tag{10}$$

[1] *Sulle onde progressive di tipo permanente*, in questi Rendiconti, vol. XVI (2° semestre 1907), pp. 777-790.

6. — Inversione.

Se si pensa che la forma del campo L non è *a priori* determinata, ma dipende dalla linea libera l, mentre il campo S si presenta, in ogni caso di moto ondoso, come una striscia rettilinea compresa fra l'asse reale $\psi = 0$ e la sua parallela $\psi = q$, appare vantaggioso di assumere come variabile indipendente la f, anzichè il posto z, risguardando invece la stessa z e, di conseguenza, la velocità w come funzioni di f entro S.

In questa accezione conviene immaginare anche F espressa per f (anzichè per z). La (9) si scrive in conformità

$$z = \frac{1}{c} f - \frac{1}{c} \mathrm{F}(f), \tag{9'}$$

con che (dato che F si mantiene finita) si mette in evidenza il comportamento asintotico della funzione $z(f)$ (dei punti della striscia S).

Scindendo il reale dall'immaginario, la (9') dà:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{c} \varphi - \frac{1}{c} \Phi(\varphi, \psi), \\ y = \frac{1}{c} \psi - \frac{1}{c} \Psi(\varphi, \psi). \end{cases} \tag{9''}$$

7. — Flusso integrale durante un intervallo di tempo qualsiasi.

Inteso che si tratta di flusso assoluto, basterà integrare l'espressione (3) di Q fra i due istanti t_1, t_2 che limitano l'intervallo.

Colla stessa trasformazione impiegata al n. 4, si ha dalla (3)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Q}\, dt = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} (cy - q)\, dx,$$

donde una prima espressione del trasporto globale M (attraverso una verticale fissa)

$$\mathrm{M} = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx - \frac{q}{c} (x_2 - x_1), \tag{11}$$

Dalla (3) stessa, ove si lasci indicata l'integrazione rispetto ad y, e si designi con L' quella porzione di L, che sta fra le ascisse x_1 ed x_2, con $d\mathrm{L}$ un generico elemento di campo, si ha pure

$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{L}'} \left(c - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\mathrm{L}. \tag{11'}$$

Poniamo mente alla corrispondenza biunivoca fra le due striscie L ed S; chiamiamo S′ la porzione di quest'ultima, che fa riscontro ad L′; e notiamo che la (9) [ovvero l'inversa (9′)] stabilisce una rappresentazione conforme fra i due campi. Il modulo della rappresentazione (rapporto fra un elemento $|dz|$ del piano z e il corrispondente elemento $|df|$ del piano f) è $\left|\frac{dz}{df}\right|$. Dette perciò dL e dS due areole corrispondenti dei due piani, si avrà

$$dL = \left|\frac{dz}{df}\right|^2 dS , \tag{12}$$

dove si può, a piacere, considerare z come funzione di f [definita dalla (9)′], o viceversa.

D'altra parte, dall'identità

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\frac{dz}{df}} ,$$

eguagliando le parti reali, segue subito

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial\varphi} \frac{1}{\left|\frac{dz}{df}\right|^2} .$$

Con ciò la (11′), ove si adottino come variabili d'integrazione φ e ψ, in luogo di x, y, assume l'aspetto

$$M = \int_{S'} \left\{ \left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c} \frac{\partial x}{\partial\varphi} \right\} dS .$$

Le (9′) ed (8) [attesa la monogeneità di $F(\varphi + i\psi)$] dànno

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c} \frac{dF}{df} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{i}{c} \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} ,$$

da cui

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{c^2}\left|\frac{dF}{df}\right|^2 ,$$

ovvero anche, considerando F funzione di f pel tramite di z e ricordando la (10),

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \beta^2 \left|\frac{df}{dz}\right|^2 .$$

Di qua, ove si noti che, per la prima delle (9″),

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

si ricava

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \beta^2 \left|\frac{df}{dz}\right|^2 .$$

La precedente espressione di M, ponendo

$$\mathrm{N} = - \frac{1}{c^2}\int_{S'} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\, dS , \tag{13}$$

e riprendendo nell'integrale residuo le variabili x, y, può in definitiva essere scritta

$$\mathrm{M} = \int_{L'} \beta^2\, d\mathrm{L} + \mathrm{N} . \tag{14}$$

8. — Teorema (generalizzato) di Stokes-Rayleigh.

Verificheremo tra un momento che l'addendo N si mantiene sempre finito, anche al crescere indefinito della lunghezza del tratto L′.

Il primo addendo è invece essenzialmente positivo. Di qua l'interesse della trasformazione eseguita, la quale consente senz'altro di affermare che: *di regola — in particolare ogniqualvolta si tratti di onde periodiche — il trasporto globale* M *cresce indefinitamente con* L′, *cioè coll'intervallo di tempo, durante il quale lo si considera.*

È questo il teorema (generalizzato) di Stokes-Rayleigh.

Resta da giustificare l'affermazione che N si mantiene finito.

Notiamo all'uopo che il campo S′ del piano f (fig. 2) è limitato dalle due parallele $\psi = 0$, $\psi = q$, nonchè da due trasversali σ_1, σ_2, immagini delle verticali $x = x_1$, $x = x_2$ del piano z.

Detto complessivamente σ' l'intero contorno di S′, $d\sigma'$ un suo elemento, n la direzione della normale volta verso l'interno di S′, si ha, applicando il lemma di Green,

$$\mathrm{N} = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma'} \Phi \cos(\widehat{n\varphi})\, d\sigma' .$$

Siccome, sulle parallele $\psi = 0$, $\psi = q$, $\cos(\widehat{n\varphi})$ si annulla, così rimane

$$\mathrm{N} = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi \cos(\widehat{n\varphi})\, d\sigma' .$$

L'elemento $d\sigma'$ di una delle due trasversali e l'elemento dy della verticale corrispondente stanno nel rapporto, essenzialmente finito, $\left|\frac{df}{dz}\right|$ (eguale alla velocità relativa $|w|$). Ovunque finita è del pari la funzione Φ [n. 4].

Detto pertanto P il prodotto della massima ordinata di l per il limite superiore del modulo di Φw in tutto il campo del moto, si ha subito (immaginando di riportare l'integrale testè scritto al piano z),

$$|\mathrm{N}| \leq \frac{2\,\mathrm{P}}{c^2},$$

c. d. d.

Osservazione I. In prima approssimazione, trattando cioè come una quantità di primo ordine il rapporto β (fra la velocità assoluta e la velocità di propagazione) e trascurando in conformità β^2, M si riduce ad N. Vi è incluso in particolare il noto risultato della teoria elementare di Airy (in cui si trascura appunto β^2), che le onde oscillatorie semplici non dànno luogo a spostamenti globali di massa.

Osservazione II. L'espressione (14) di M mostra altresì che il trasporto superficiale deve avvertirsi non appena si spinga l'approssimazione fino a tener conto dei termini di second'ordine in β. Ciò è appunto accaduto a Stokes fin dal 1847.

9. — Relazione generale fra elementi globali.

Supponiamo che esista un *livello medio* (in senso asintotico), ossia che il valor medio dell'ordinata y

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx,$$

relativo ad un generico tratto di canale (x_1, x_2), ammetta un limite ben determinato h al crescere indefinito del tratto.

Notiamo che questa condizione è sempre soddisfatta quando si tratta di onde periodiche. In tal caso il livello medio asintotico coincide, come si verifica immediatamente, col valore medio relativo ad un'onda generica, cioè con

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} y(x)\,dx,$$

λ essendo la lunghezza d'onda.

Notiamo ancora che l'ipotesi di esistenza di un livello medio, esplicitamente enunciata per preoccupazione di rigore matematico, non costituisce dal punto di vista fisico restrizione alcuna, essendo implicita tra le caratteristiche intuitive del moto ondoso.

Ciò posto, eguagliamo le due espressioni (14) ed (11) di M. Moltiplicando da una parte e dall'altra per $\frac{1}{2}\frac{c^2}{x_2 - x_1}$, si ha subito

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\frac{1}{2}\int_{L'} c^2\beta^2\, dL = \frac{1}{2}c^2\left\{\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\, dx - \frac{q}{c}\right\} - \frac{1}{2}c^2\frac{N}{x_2 - x_1}.$$

Al crescere indefinito dell'intervallo $x_2 - x_1$, la quantità in parentesi converge verso $\frac{1}{2}c^2\left(h - \frac{q}{c}\right)$, mentre l'ultimo termine ha per limite zero.

Anche il primo membro converge dunque verso un limite ben determinato τ: e questo (ricordando che $\beta^2 c^2$ rappresenta la velocità assoluta) dimostra che esiste un valore medio (in senso asintotico) dell'energia cinetica del moto ondoso per unità di lunghezza (e di larghezza) del canale. Di più sussiste la relazione notevole

$$\tau = \frac{1}{2}c^2\left(h - \frac{q}{c}\right). \tag{15}$$

Nel caso di onde periodiche, τ si identifica naturalmente coll'energia cinetica di un'onda, divisa per la lunghezza d'onda.

Botanica. — *Ricerche sulla morfologia e sull'accrescimento dello stipite delle Palme*. Nota preventiva del Socio A. Borzì e del dott. G. Catalano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche*. Nota del Corrispondente F. Enriques.

1. In una Nota, che ho avuto l'onore di presentare all'Accademia nella seduta del 2 decembre 1906 (1) ho dimostrato che le superficie possedenti infinite trasformazioni birazionali in sè contengono in generale un fascio di curve ellittiche, le sole eccezioni appartenendo alla famiglia delle rigate o a quella delle superficie coi generi $p_a = p_g = P_2 = P_3 = \cdots = 1$. Per contro ho fatto notare che ogni superficie contenente un fascio di curve ellittiche C ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, *purchè esistano due curve secanti le* C *in gruppi di punti i cui multipli non sieno equivalenti*. L'esame delle condizioni a cui conduce siffatta ipotesi (esame ch'io

(1) *Sulle superficie algebriche, che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali*, Rend., vol. XV, ser. 5ª, pag. 665.

proseseguivo allora in rapporto alla base della superficie considerata dal sig. Severi), fu da me rimandato ad altra occasione. Oggi ritornando sul problema, e limitandomi per ora al caso in cui il fascio delle C sia lineare, sono pervenuto ad una conclusione inaspettata:

Ogni superficie contenente un fascio lineare di curve ellittiche C di ordine n, possiede infinite curve secanti le C *in gruppi di n punti non equivalenti ed i cui multipli sono pure non equivalenti; per conseguenza ammette una serie discontinua di trasformazioni birazionali in se stessa.*

2. Premettiamo alcune osservazioni sulle curve ellittiche.

Quando sopra una curva ellittica C è *dato* un gruppo di n punti G_n si può costruire razionalmente in funzione di esso:

1) la serie lineare completa g_n^{n-1} a cui il G_n appartiene;

2) un qualsiasi multiplo $g_{rn}^{rn-1} (= rg_n)$ della serie anzidetta.

In generale non è possibile costruire razionalmente altre serie ed in ispecie serie g_m di grado $m < n$. Così le superficie ellittiche di determinante n ($p_a = -1$, $p_g = 0$) [1] porgono esempio di superficie contenenti un fascio lineare di curve ellittiche, tutte identiche fra loro, sopra le quali non si può determinare (razionalmente) un gruppo di $m < n$ punti.

Se la curva ellittica C è data proiettivamente come curva d'un certo ordine m, per es. nel piano, la serie g_m segata su di essa dalle rette deve considerarsi come *data*. Allore se è dato anche un gruppo G_n, non appartenente a quella, si possono costruire razionalmente anche

3) le serie

$$rg_n + sg_m ,$$

dove r, s ricevono valori positivi o negativi tali che

$$rn + sm > 0 .$$

Pertanto se sopra una curva ellittica C si suppone *dato* unicamente un gruppo G_n, bisogna supporre che la curva C stessa sia proiettivamente data mediante una serie multipla di g_n, cioè che la C sia d'un certo ordine rn, con r intero ≥ 1, e che G_n sia il gruppo dei punti di contatto d'una retta (o d'un piano ...) avente n contatti r-punti colla curva.

In particolare quando si parlerà di una curva ellittica su cui è dato razionalmente *un* punto, si dovrà riferirsi a una curva C_n d'un certo ordine n che apparterrà ad uno spazio S_{n-1} o sarà proiezione di una siffatta curva normale, sulla quale il punto dato sia il punto di contatto d'un iperpiano n tangente. Sarà in nostro arbitrio di fissare il valore di n, e — prendendo $n = 3$ — si potrà avere *in funzione razionale del punto dato* una trasformazione della nostra curva in una *cubica su cui è dato un flesso.*

Data una curva ellittica e sopra di essa un punto qualsiasi è sempre possibile trasformarla in una cubica su cui è dato un flesso, *senza aggiunta*

[1] Cfr. F. Enriques, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XX, 5 marzo 1905.

d'irrazionalità numeriche. Invece data una cubica con un flesso, ogni trasformazione di questa che conduca per es. ad una nuova cubica su cui sia dato un punto non di flesso, richiede operazioni irrazionali sui coefficienti dell'equazione della curva e sulle coordinate del punto dato.

Così appare che sopra una curva ellittica su cui è dato un punto non è possibile *in generale* costruire razionalmente un altro punto.

3. Ora suppongasi data una superficie F contenente un fascio lineare di curve ellittiche C, ed una curva K unisecante le C. In base alle osservazioni precedenti si può sempre trasformare le C in cubiche su cui è dato un flesso, e poichè questa trasformazione si compie *razionalmente* per ogni C, *essendo data la* K, così si riesce a trasformare birazionalmente la superficie data in una F_n d'un certo ordine n con retta $(n-3)$pla e con un punto $(n-2)$plo su questa, costituente un flesso per le cubiche C. Si può anche supporre che la retta $(n-3)$pla sia tangente di flesso per tutte le cubiche C.

Dal punto $(n-2)$plo la superficie si lascia proiettare sopra un piano doppio con curva di diramazione D d'un certo ordine $2m$ dotata d'un punto $(2m-3)$plo 0.

Consideriamo, in questo piano, le curve d'ordine p passanti $p-1$ volte per 0; esse formano un sistema lineare di dimensione

$$\frac{p(p+3)}{2} - \frac{p(p-1)}{2} = 2p .$$

Una di esse, interseca D nel punto 0 contato $(2m-3)$ $(p-1)$ volte e in

$$2mp - (2m-3)(p-1) = 2m + 3(p-1)$$

punti variabili; se p è dispari, e quindi $p-1$ è pari, in 0 non cadono punti di diramazione della curva doppia L. Inoltre per ogni contatto che L abbia con D, spariscono 2 fra i $2m + 3(p-1)$ punti di diramazione. Se si hanno $m + \frac{3(p-1)}{2}$ contatti, cioè se la L tocca la D ovunque la incontra, l'immagine di L sulla superficie F_n dovrà spezzarsi in due curve unisecanti le C. La determinazione di una L per cui ciò avvenga importa

$$m + \frac{3(p-1)}{2}$$

equazioni, provenienti dalla bisezione dei periodi delle funzioni abeliane relative a D; a codeste equazioni si può soddisfare certo in un numero finito di modi se si prende

$$2p = m + \frac{3(p-1)}{2}$$

cioè

$$p = 2m - 3 .$$

Per tal guisa si determinano dunque sopra F_n due curve unisecanti le C, ed è facile vedere che — considerando una qualunque di esse L_1 — il punto che L_1 determina sopra una C generica è tale che un suo multiplo qualsiasi non è equivalente all'equimultiplo del flesso dato, giacchè in corrispondenza alle tangenti ad L in O si hanno curve ellittiche C su cui i due punti vengono a coincidere, il che importa che la differenza dei valori dell'integrale ellittico C nei due nominati punti non possa essere sempre uguale ad una frazione di periodo, al variare di C.

In conclusione, se una superficie F contiene un fascio lineare di curve ellittiche C ed una curva unisecante le C, si può costruire una seconda unisecante, per modo che i punti segati dalle due unisecanti sopra una C generica sieno disequivalenti insieme coi loro multipli.

4. Si abbia ora una superficie F contenente un fascio di curve ellittiche C ed una curva K secante le C in un certo numero n di punti, per modo che su ogni C venga *data* una g_n^{n-1}.

Siamo in questo caso se per es. le curve C sono d'ordine n.

Consideriamo tutte le g_n^{n-1} di una curva ellittica C. Esse costituiscono gli elementi (punti) d'un ente ellittico C′, che può ritenersi come una curva nascente da C per mezzo di una nota trasformazione.

Alla serie g_n che si suppone data sulla C corrisponde un punto razionalmente dato su C′.

Al variare di C, C′ varia pure e descrive un ente algebrico a due dimensioni o superficie F′, contenente un fascio lineare di curve ellittiche C′ ed una curva K′ unisecante le C′.

In forza del n. 3 si può determinare su F′ una seconda unisecante L′, e così si riesce a determinare sopra ogni C *un'altra* serie $\overline{g}_n$ disequivalente alla data g_n, ed anzi tale che due multipli delle anzidette serie non sono equivalenti.

Tanto basta perchè sopra ogni C venga razionalmente determinata una trasformazione birazionale non ciclica

$$A' = A + g_n - \overline{g}_n ,$$

e quindi perchè si ottenga una trasformazione birazionale non ciclica della superficie F. c. d. d.

Fisica Matematica. — *Sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Il metodo, comunissimo nelle questioni di Fisica-matematica, che generalmente si segue per lo studio della struttura dei pianeti, consiste nel fare alcune ipotesi, suggerite dall'osservazione e dall'intuizione, sulla loro forma e sulla distribuzione della massa nel loro interno, e nel trarre poi da tali ipotesi la maggior copia di conseguenze. Finchè queste conseguenze non contradicono ai dati dell'osservazione, le ipotesi fatte saranno dette plausibili; mentre saranno rigettate, non appena si sarà riscontrata qualche incompatibilità. In questo modo i risultati che fin ora si hanno sulla distribuzione della massa nell'interno dei pianeti, sono quasi tutti negativi.

Tali risultati negativi, pur avendo il loro valore, non apportano sempre un vero progresso nella questione; mentre di maggiore interesse sono generalmente quei risultati, i quali stabiliscono delle condizioni analitiche necessarie e sufficienti a cui deve soddisfare la funzione densità, affinchè certi fatti, stabiliti dall'osservazione o in qualsiasi altro modo, siano verificati. Infatti qualunque sia l'ipotesi che si fa sulla variabilità della densità nell'interno dei pianeti, in armonia con le condizioni analitiche stabilite, non potrà mai aversi incompatibilità con i fatti che a queste condizioni hanno dato luogo.

Una condizione necessaria e sufficiente sulla espressione analitica della densità si ottiene facendo il Δ^2 della formola (2) [o (2)'] della mia Nota: *Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna.* Essa pone in evidenza il contributo che la conoscenza dell'azione esterna del pianeta apporta sulla determinazione della densità.

Ora ci si può domandare: 1°) qual contributo dà sulla determinazione della densità la conoscenza del moto del pianeta, supposto rigido, attorno al proprio baricentro? 2°) qual contributo totale dà sulla determinazione della densità la conoscenza dell'azione esterna del pianeta e del suo moto attorno al baricentro?

Nella presente Nota mi propongo appunto di rispondere a queste due domande. In un primo paragrafo premetterò l'analisi relativa alla risoluzione di un particolare sistema di equazioni integrali, dal quale, come si vedrà nel secondo paragrafo, si possono far dipendere le due quistioni propostemi.

§ 1.

1. Siano dati i costanti qualsiasi $A_1, A_2, \ldots A_i$; e siano pure date, in un qualsiasi campo finito τ, i funzioni $u_1, u_2, \ldots u_i$ non identicamente null

che per semplicità supporremo finite e continue (1). Ci proponiamo di trovare l'espressione analitica più generale di una funzione ϱ, la quale soddisfaccia al sistema di equazioni integrali di 1ª specie:

$$(1) \qquad \int_\tau u_s \varrho \, d\tau = A_s , \quad (s = 1, 2, \dots i) .$$

Posto:

$$\int_\tau u_\sigma u_s \, d\tau = v_{\sigma s} ,$$

$$D = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1i} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{i1} & v_{i2} & \dots & v_{ii} \end{vmatrix} ,$$

$$D_s = \begin{vmatrix} v_{11} \dots v_{1(s-1)} & u_1 & v_{1(s+1)} \dots v_{1i} \\ v_{21} \dots v_{2(s-1)} & u_2 & v_{2(s+1)} \dots v_{2i} \\ \dots \dots \dots \dots \dots & \dots & \dots \dots \dots \dots \\ v_{i1} \dots v_{i(s-1)} & u_i & v_{i(s+1)} \dots v_{ii} \end{vmatrix} ,$$

si ha ovviamente:

$$\int_\tau D_s u_\sigma \, d\tau = \begin{cases} D & \text{per } s = \sigma , \\ 0 & \text{per } s \neq \sigma ; \end{cases}$$

e quindi, supposto $D \neq 0$, e posto:

$$(2) \qquad \varrho = \pi + \frac{1}{D} \left\{ \sum_1^i {}_\sigma D_\sigma \left(A_\sigma - \int_\tau u_\sigma \pi \, d\tau \right) \right\}$$

con π funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ, si verifica subito che la (2) soddisfa al sistema (1). È poi evidente che, viceversa, qualunque soluzione del sistema (1) può mettersi sotto la forma (2). Adunque, *se il determinante* D *è diverso da zero, la soluzione generale del sistema di equazioni integrali* (1) *è data dall'espressione* (2) *di* ϱ, *nella quale* π *è una funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo* τ.

2. Se $D = 0$, sia $p \geq 1$ la caratteristica di D. Allora esisteranno $i - p$ sistemi linearmente indipendenti, ed $i - p$ solamente, di valori costanti:

$$(3) \qquad \alpha_{1s} , \alpha_{2s} , \dots \alpha_{is} , \quad [s = 1, 2, \dots (i - p)] ,$$

(1) Basterebbe supporre che siano integrabili secondo Lebesgue.

tali che:

$$(4)\qquad \begin{cases} \alpha_{1s}\, v_{11} + \alpha_{2s}\, v_{12} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{1i} = 0\,, \\ \alpha_{1s}\, v_{21} + \alpha_{2s}\, v_{22} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{2i} = 0\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{1s}\, v_{i1} + \alpha_{2s}\, v_{i2} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{ii} = 0\,. \end{cases}$$

Da queste risulta:

$$\begin{aligned} &\int_\tau (\alpha_{1s}\, u_1 + \alpha_{2s}\, u_2 + \cdots + \alpha_{is}\, u_i)^2\, d\tau = \\ &= \alpha_{1s}(\alpha_{1s}\, v_{11} + \alpha_{2s}\, v_{12} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{1i}) + \\ &+ \alpha_{2s}(\alpha_{1s}\, v_{21} + \alpha_{2s}\, v_{22} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{2i}) + \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \alpha_{is}(\alpha_{1s}\, v_{i1} + \alpha_{2s}\, v_{i2} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{ii}) = 0\,; \end{aligned}$$

e quindi, in virtù della continuità delle $u_1\,.\,u_2\,.\,\ldots\,u_i$, *si avrà in tutto il campo* τ;

$$(5)\qquad \alpha_{1s}\, u_1 + \alpha_{2s}\, u_2 + \cdots + \alpha_{is}\, u_i = 0\,, \quad (s = 1\,,2\,,\ldots\,i-p).$$

E poichè gli $i-p$ sistemi (3) sono linearmente indipendenti, avremo che *le* $i-p$ *relazioni lineari omogenee* (5) *tra le* $u_1\,.\,u_2\,.\,\ldots\,u_i$ *saranno anch'esse linearmente indipendenti.*

3. Viceversa supponiamo che le $u_1\,.\,u_2\,.\,\ldots\,u_i$ siano legate da $i-p$ relazioni, ed $i-p$ solamente, linearmente indipendenti come le (5). Allora gli $i-p$ sistemi di costanti $\alpha_{1s}\,,\alpha_{2s}\,.\,\ldots\,\alpha_{is}$ saranno linearmente indipendenti. Inoltre dalle (5) si avrà:

$$0 = \int_\tau u_\sigma(\alpha_{1s}\, u_1 + \alpha_{2s}\, u_2 + \cdots + \alpha_{is}\, u_i)\, d\tau = \alpha_{1s}\, v_{\sigma 1} + \alpha_{2s}\, v_{\sigma 2} + \cdots + \alpha_{is}\, v_{\sigma i}\,,$$

ossia gli $i-p$ sistemi di costanti $\alpha_{1s}\,.\,\alpha_{2s}\,.\,\ldots\,\alpha_{is}$ soddisferanno al sistema di equazioni (4); e quindi la caratteristica del determinante è non maggiore di p. Per altro la caratteristica di D non può essere minore di p; perchè altrimenti, in virtù del risultato precedente, dovrebbero sussistere tra le $u_1\,.\,u_2\,,\ldots\,u_i$ più di $i-p$ relazioni lineari omogenee e linearmente indipendenti, contrariamente all'ipotesi fatta; quindi *la caratteristica di* D *deve essere uguale a* p.

Riepilogando si ha: *se la caratteristica del determinante* D *è* p, *le funzioni* $u_1\,,u_2\,,\ldots\,u_i$ *saranno legate da* $i-p$ *relazioni lineari omogenee e linearmente indipendenti; e viceversa.*

4. Il risultato precedente si può enunciare dicendo che se p è la caratteristica di D, p delle funzioni $u_1\,,u_2\,.\,\ldots\,u_i$, e p solamente, saranno li-

nearmente indipendenti. Supponendo, per fissare le idee, che queste p funzioni siano le $u_1, u_2, \dots u_p$, avremo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1p} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{p1} & v_{p2} & \dots & v_{pp} \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

$$(6) \quad \begin{cases} u_{p+1} = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \dots + a_{1p} u_p . \\ \dots \dots \dots

La (2)′ *rappresenterà quindi la soluzione più generale del sistema di equazioni integrali* (1).

Riepilogando si ha: *se* p *è la caratteristica del determinante* D, p *e* p *solamente delle funzioni* $u_1, u_2, \dots u_i$ *saranno linearmente indipendenti: se* $u_1, u_2, \dots u_p$ *sono le* p *funzioni linearmente indipendenti, se le* (6) *esprimono le* $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots u_i$ *mediante le* $u_1, u_2, \dots u_p$; *condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema di equazioni integrali* (1) *ammetta una soluzione è che le* $A_1, A_2, \dots A_i$ *soddisfacciano alle condizioni* (7); *se queste condizioni sono soddisfatte, la soluzione più generale del sistema* (1) *sarà data dall'espressione* (2)′ *di* ϱ, *nella quale* π *è una funzione arbitraria del campo* τ *atta all'integrazione.*

5. Ci proponiamo ora di determinare le relazioni (6), e quindi ancora le condizioni (7), nell'ipotesi sempre che $u_1, u_2, \dots u_p$ siano linearmente indipendenti, ossia nell'ipotesi che Δ sia il minore simmetrico di ordine più alto che non si annulla nel determinante D.

A tal uopo si osservi che si ha, come è facile verificare,

$$(8)\qquad \int_\tau \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1p} & u_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \dots & v_{pp} & u_p \\ v_{(p+t)1} & \dots & v_{(p+t)p} & u_{p+t} \end{vmatrix}^2 d\tau = v_{11}\, v_{22} \dots v_{pp} \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1p} & v_{1(p+1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \dots & v_{pp} & v_{p(p+1)} \\ v_{(p+t)1} & \dots & v_{(p+t)p} & v_{(p+t)(p+1)} \end{vmatrix} = 0;$$

quindi (1), in virtù della continuità delle funzioni u, si avrà in tutto il campo τ:

$$(6)'\qquad \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1p} & u_p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \dots & v_{pp} & u_p \\ v_{(p+t)1} & \dots & v_{(p+t)p} & u_{p+t} \end{vmatrix} = 0.$$

Facendo variare t *da* 1 *ad* $i-p$, *si hanno* $i-p$ *equazioni, che sono appunto le equazioni* (6); e quindi *le condizioni* (7) *saranno*:

$$(7)'\qquad \begin{vmatrix} v_{11} & \dots & v_{1p} & A_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p1} & \dots & v_{pp} & A_p \\ v_{(p+t)1} & \dots & v_{(p+t)p} & A_{p+t} \end{vmatrix} = 0, \qquad (t = 1, 2, \dots i-p).$$

(1) Dall'analisi che precede risulta indirettamente che se tutti i minori simmetrici del determinante D di ordine superiore a p si annullano, mentre uno almeno tra quelli di ordine p è diverso da zero, la caratteristica di D è p. Questa proposizione ha un valore pratico nei casi particolari; essa può dimostrarsi direttamente, valendosi di formole analoghe alle (8).

§ 2.

6. Passiamo ora a determinare il contributo che la conoscenza del moto del pianeta, supposto rigido, attorno al suo baricentro, dà sulla determinazione della densità, ossia la condizione analitica necessaria e sufficiente a cui deve soddisfare la densità del pianeta, affinchè il suo moto rigido attorno al baricentro sia quello dato.

Prendiamo per assi x, y, z, invariabilmente collegati col pianeta, gli assi principali centrali d'inerzia; adottiamo qui senz'altro le notazioni introdotte nella mia citata Nota dei Lincei; e poniamo:

$$(9) \qquad A = \int_\tau \xi^2 \varrho \, d\tau \quad , \quad B = \int_\tau \eta^2 \varrho \, d\tau \quad , \quad C = \int_\tau \zeta^2 \varrho \, d\tau .$$

Osserviamo che le equazioni di Eulero ci dànno le condizioni necessarie e sufficienti a cui devono soddisfare i momenti principali d'inerzia A, B, C, supposte note le componenti di rotazione del moto rigido del pianeta; e poichè esse sono lineari omogenee in A, B, C, avremo che, supposto noto il moto rigido del pianeta attorno al proprio baricentro, saranno pure noti i rapporti di A, B e C [1].

Posto:

$$A = hC \quad , \quad B = kC ,$$

con h, k costanti dipendenti dal moto del pianeta, supposto noto, si avrà dalle (9):

$$(1)'' \qquad \int_\tau (\xi^2 - h\zeta^2) \varrho \, d\tau = 0 \quad , \quad \int_\tau (\eta^2 - k\zeta^2) \varrho \, d\tau = 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il moto rigido del pianeta sia quello presupposto, è che la densità ϱ del pianeta soddisfaccia simultaneamente alle equazioni integrali (1)'', le quali sono un caso particolare del sistema (1).

Osserviamo che *il determinante* D *corrispondente al sistema* (1)'' *è certamente diverso da zero.* Infatti nel caso contrario, in virtù dei risultati del § precedente, le funzioni:

$$u_1 = \xi^2 - h\zeta^2 \quad , \quad u_2 = \eta^2 - k\zeta^2 ,$$

che non sono identicamente nulle, dovrebbero essere legate da una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti:

$$\alpha_1(\xi^2 - h\zeta^2) + \alpha_2(\eta^2 - k\zeta^2) = 0 ;$$

e ciò è impossibile, se le costanti α_1, α_2 non sono tutte e due nulle.

(1) Escluso il caso in cui tutti i minori del 2° ordine, tratti dal determinante dei coefficienti di A, B, C nelle equazioni di Eulero, siano nulli; ossia escluso il caso in cui il moto rotatorio avviene, come si verifica facilmente, attorno ad un asse fisso nel pianeta con velocità costante. Questo caso, come è noto, non si presenta per la terra, e noi lo riterremo escluso dalle nostre considerazioni.

Applicando la formola (2), *avremo per l'espressione più generale della densità* ϱ *del pianeta, corrispondente al dato moto rigido,*

$$(2)'' \qquad \varrho = \pi - \frac{1}{D}\left\{ D_1 \int_\tau u_1 \pi \, d\tau + D_2 \int_\tau u_2 \pi \, d\tau \right\},$$

dove π è una funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ, e dove D_1, D_2 sono due determinanti di 2° ordine che si ottengono immediatamente dalle posizioni fatte al § 1, n. 1.

7. Supponiamo ora che, oltre al moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro, sia nota la sua azione esterna.

Osserviamo anzitutto che, come è stato notato nell'introduzione, in virtù della conoscenza dell'azione esterna, la densità ϱ deve soddisfare ad una certa condizione analitica. Per scriverla rammentiamo che nella mia citata Nota fu posto:

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2},$$

ξ, η, ζ essendo le coordinate di un punto generico di τ rispetto agli assi x, y, z; e poniamo qui:

$$\Delta'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

x, y, z essendo le coordinate di un punto qualsiasi dello spazio. Allora si avrà dalle (1), (2) di detta Nota, in virtù del teorema di Poisson,

$$(10) \quad \varrho(x, y, z) = -\int_\varphi \Delta'^2 G_2 \cdot \Delta^2 \varrho \, d\tau + \Delta'^2 \int_\varphi \left(\frac{d\Delta^2 G_2}{dn} V - \frac{dV}{dn} \Delta^2 G_2 \right) dS;$$

e se si rammenta (cfr. cit. Nota, § 2) che prestabilita l'azione esterna di una massa distribuita nel campo τ, ciò che rimane di arbitrario circa alla densità $\varrho(x, y, z)$ è il suo Δ^2, avremo che, *qualunque sia la funzione che si pone nella formola* (10) *al posto di* $\Delta^2\varrho$, *la distribuzione fatta in* τ *con la densità* $\varrho(x, y, z)$, *data dalla* (10) *stessa, avrà sempre per azione esterna quella prestabilita.*

È superfluo notare che qualunque funzione $\varrho(x, y, z)$, per la quale la espressione $\Delta^2\varrho$ sia finita ed atta all'integrazione nel campo τ, può sempre esprimersi mediante la formola (10).

8. Volendo ora considerare il contributo complessivo sulla determinazione della densità del pianeta, dovuto alla conoscenza dell'azione esterna del pianeta e del suo moto rigido attorno al baricentro, dovremo esaminare dapprima se, avendo tenuto conto dell'azione esterna, la conoscenza di tale moto rigido apporta effettivamente un ulteriore contributo.

Per questo rammenteremo intanto che, come per la prima volta fu stabilito esattamente dal prof. Pizzetti (1), nota l'azione esterna di un pianeta, sono determinate le differenze fra i momenti principali d'inerzia del pianeta stesso. Allora, poichè per ipotesi è noto ancora il moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro, facendo uso delle equazioni di Eulero, risulteranno determinati i tre momenti principali d'inerzia A, B, C.

Osserviamo che basta qui tener conto della conoscenza di uno solo dei tre momenti principali d'inerzia; infatti se per es. si suppone noto A, gli altri due B e C si potranno determinare mediante le suddette differenze, e quindi, in virtù del teorema di Pizzetti, mediante l'azione esterna del pianeta.

Ora si rammenti che, come fu dimostrato nella mia citata Nota (§ 6), condizione necessaria e sufficiente affinchè l'integrale

$$\int_\tau \varrho U d\tau$$

sia invariante rispetto a $\Delta^2\varrho$, è che la funzione U sia armonica; sicchè, essendo $\Delta^2\xi^2 = 2$, avremo che nessuno dei momenti principali d'inerzia è pienamente determinato dalla sola conoscenza dell'azione esterna del pianeta; e per conseguenza la ulteriore conoscenza dei momenti principali d'inerzia del pianeta, ossia *l'ulteriore conoscenza del moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro deve dare un nuovo contributo sulla determinazione della densità* ϱ.

9. Per la determinazione di questo nuovo contributo basterà, come si è già osservato, tenere conto della conoscenza di uno solo dei momenti principali d'inerzia, ad es. di A, e indi fare uso dell'espressione analitica di A, che si ottiene sostituendo nella prima delle (9) al posto di ϱ il secondo membro della (10). Noi però qui ci varremo dell'espessione equivalente più semplice, che si ottiene dalla formola generale (9) della mia citata Nota, facendo $U = \xi^2$. In questo modo si avrà:

$$(11) \qquad A = \int_\tau \varrho\xi^2 \, d\tau = \int_\tau (W - W_1) . \Delta^2\varrho \, . \, d\tau + \\ + \int_\varphi \left(V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} \right) dS,$$

dove

$$W(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_\tau \frac{\xi^2}{r} \, d\tau ,$$

e dove W_1 ha un significato che qui è superfluo richiamare; sicchè posto:

$$A_1 = A - \int_\varphi \left(V \frac{d\Delta^2 W_1}{dn} - \Delta^2 W_1 \frac{dV}{dn} \right) dS ,$$

(1) *Intorno alle possibili distribuzioni della massa nell'interno della Terra* (Annali di matematica, tom. XVII, ser. II, pag. 233). Cfr. mia cit. Nota, §§ 4, 5).

avremo per $\Delta^2\varrho$ la seguente equazione integrale:

$$(1)''' \qquad \int_\tau (W - W_1)\,\Delta^2\varrho\, d\tau = A_1$$

con $W - W_1$ funzione nota e A_1 costante pure nota.

Osserviamo che la funzione $W - W_1$ non può essere identicamente nulla nel campo τ; perchè altrimenti (cfr. mia cit. Nota, pag. 105) si dovrebbe avere:

$$\Delta^2\xi^2 = 0,$$

che è un'uguaglianza assurda (1). Dalla (1)''' si avrà quindi, in virtù dei risultati del § 1, che l'espressione più generale di $\Delta^2\varrho$ è data dalla formola:

$$\Delta^2\varrho = \pi + \frac{W - W_1}{\int_\tau (W - W_1)^2\, d\tau}\left\{A_1 - \int_\tau (W - W_1)\,\pi\, d\tau\right\}$$

con π funzione arbitraria atta all'integrazione nel campo τ.

Sostituendo questa espressione di $\Delta^2\varrho$ nella formola (10), *avremo la espressione più generale della densità* $\varrho(x, y, z)$ *corrispondente alla data azione esterna e al dato moto rigido del pianeta.*

Osservazione. — L'espressione, che così si ottiene, di $\varrho(x, y, z)$ contiene la funzione arbitraria π; della quale bisognerà valersi per determinare nuovi contributi, corrispondenti a nuovi eventuali dati.

S'intende che in certi casi può essere più conveniente scegliere una via diversa. Così ad es., se si suppone che, oltre all'azione esterna e al moto rigido attorno al baricentro, sia nota nei punti della superficie S del pianeta, la densità e la sua derivata normale sarà più semplice valersi delle formole contenute nei §§ 7, 8 e 9 della mia citata Nota, ed operare sul $\Delta^6\varrho$, come si è operato sul $\Delta^2\varrho$ nei nn. 8 e 9 della presenta Nota.

Meccanica. — *Sulla risoluzione delle equazioni integro-differenziali dell'equilibrio dei corpi elastici isotropi per dati spostamenti in superficie.* Nota del Corrisp. G. Lauricella.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) Di qui risulta nuovamente che l'ulteriore conoscenza del moto rigido del pianeta attorno al suo baricentro deve dare un nuovo contributo sulla determinazione della densità.

Cristallografia. — *La legge di Hauy nei cristalli solidi, fluenti e liquidi.* Nota del Corrisp. C. Viola.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Sulla teoria della gravitazione.* Nota di Max Abraham, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Alle dieci componenti del tensore gravitazionale assegniamo i valori seguenti:

$$(10)\quad \begin{cases} X_x = \dfrac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\psi\right\}, \quad Y_y = \dfrac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\psi\right\}, \\ \qquad\qquad Z_z = \dfrac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2+\psi\right\}, \\ X_y = Y_x = -\dfrac{1}{4\pi\gamma}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad Y_z = Z_y = -\dfrac{1}{4\pi\gamma}\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}, \\ \qquad\qquad Z_x = X_z = -\dfrac{1}{4\pi\gamma}\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}; \end{cases}$$

$$(10a)\quad X_u = U_x = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad Y_u = U_y = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial y},$$
$$Z_u = U_z = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Phi}{\partial z};$$

$$(10b)\quad U_u = \frac{1}{4\pi\gamma}\left\{-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2+\psi\right\}.$$

Essendo Φ e

$$(10c)\quad \psi = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2\right\}$$

scalari quattrodimensionali, le dieci componenti (10), (10a), (10b) si trasformano come i quadrati e prodotti delle coordinate x, y, z, u, cioè come

componenti di un tensore quattrodimensionale. Da esse derivano le componenti della *forza motrice* relativa all'unità di volume:

$$(11)\qquad \begin{cases} \nu F_x = \dfrac{\partial X_x}{\partial x} + \dfrac{\partial X_y}{\partial y} + \dfrac{\partial X_z}{\partial z} + \dfrac{\partial X_u}{\partial u}, \\ \nu F_y = \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Y_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Y_u}{\partial u}, \\ \nu F_z = \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} + \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} + \dfrac{\partial Z_z}{\partial z} + \dfrac{\partial Z_u}{\partial u}, \\ \nu F_u = \dfrac{\partial U_x}{\partial x} + \dfrac{\partial U_y}{\partial y} + \dfrac{\partial U_z}{\partial z} + \dfrac{\partial U_u}{\partial u}. \end{cases}$$

Introducendo le espressioni delle dieci componenti del tensore gravitazionale, e tenendo conto della (1), si giunge all'espressione della forza motrice:

$$(12)\qquad \nu \mathbf{F} = -\nu \operatorname{Grad} \Phi$$

identica alla (2).

Interpretiamo le espressioni assegnate alle componenti del tensore gravitazionale. Le sei prime componenti (10) del tensore dànno le « *tensioni fittizie* »; nel campo di gravità stazionario; le *tensioni normali* sono:

$$(12a)\qquad \begin{cases} X_x = \dfrac{1}{8\pi\gamma}\left\{ -\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \right\}, \\ Y_y = \dfrac{1}{8\pi\gamma}\left\{ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \right\}, \\ Z_z = \dfrac{1}{8\pi\gamma}\left\{ \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \right\}, \end{cases}$$

e le *tensioni tangenziali*

$$(12a)\qquad X_y = Y_x = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad Y_z = Z_y = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$
$$Z_x = X_z = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Esse corrispondono ad una *pressione lungo le linee di forza*, ed a *trazioni normali a queste linee*, entrambe *proporzionali al quadrato della forza motrice* F, e, *per un campo stazionario, eguali alla densità dell'energia* (v. 13). Per un campo variabile col tempo bisogna sottrarre dalle tensioni normali (12*a*) la pressione idrostatica:

$$(12c)\qquad p = \frac{1}{8\pi\gamma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l}\right)^2.$$

La *densità dell'energia* è data da:

$$(13) \qquad \varepsilon = U_u = \frac{1}{8\pi\gamma}\left\{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial l}\right)^2\right\}.$$

Essa risulta *essenzialmente positiva e, per campi stazionari, proporzionale al quadrato della forza motrice* F.

La *corrente di energia* ha le componenti (1):

$$S_x = ic\,U_x \quad , \quad S_y = ic\,U_y \quad , \quad S_z = ic\,U_z ,$$

di modo che si ottiene dalle (10*a*)

$$(14) \qquad S = -\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,\mathrm{Grad}\,\Phi = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\,F ,$$

vale a dire: *La corrente dell'energia ha la direzione della forza motrice del campo; il suo valore è proporzionale, tanto al valore della forza, quanto all'incremento, che il potenziale subisce col tempo.*

Moltiplicando l'ultima delle (11) per $-ic$, essa si scrive (1)

$$(14a) \qquad -icvF_u = -\,\mathrm{div}\,S - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} .$$

Quindi

$$(14b) \qquad -icvF_u = icv\frac{\partial\Phi}{\partial u} = v\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

sarà l'energia, la quale, nell'unità di spazio e tempo, viene trasmessa dal campo alla materia.

Siccome poi, come risulta dalle tre prime delle (11),

$$\frac{i}{c}X_u \ , \ \frac{i}{c}Y_u \ , \ \frac{i}{c}Z_u$$

sono le componenti dell'*impulso unitario* (I) del campo gravitazionale, dalla (10*a*) segue (1):

$$(15) \qquad I = \frac{1}{c^2}S = \frac{1}{4\pi\gamma c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}F .$$

La simmetria del tensore quattrodimensionale importa questa relazione generale tra la corrente dell'energia e l'impulso unitario (2).

(1) Qui la velocità della luce è considerata come costante, trascurando l'influenza suindicata del potenziale.

(2) Il postulato, che non soltanto l'impulso elettromagnetico, ma anche l'impulso meccanico unitario di un campo sia sempre eguale al flusso corrispondente dell'energia, diviso per il quadrato di c, fu enunciata dal Planck, Physikalische Zeitschrift, 9 (1908), pag. 828.

Matematica. — *Sulle condizioni sufficienti per il minimo nel calcolo delle variazioni. (Gli integrali sotto forma parametrica).* Nota IV di Eugenio Elia Levi, presentata dal Socio L. Bianchi.

4. Per dimostrare il teorema enunciato al num. 1 della Nota III (1) cominciamo col calcolare la variazione totale di I quando si passa da $\overset{0}{\mathfrak{C}}$ a $\mathfrak{C}$.

Indichiamo con $\overset{0}{F}, \overset{0}{F}_1 \ldots$ i valori di $F, F_1 \ldots$ quando per x, y, x', y' si ponga $\overset{0}{x}, \overset{0}{y}, \overset{0}{x'}, \overset{0}{y'}$: saranno queste funzioni di s. Avremo:

$$
\begin{aligned}
\Delta I &= \int_0^\tau F(xy\,;\,x'y')\,dt - \int_0^\sigma \overset{0}{F}\,ds = \\
&= \int_0^\tau [F(xy\,;\,x'y') - \overset{0}{F}s']\,dt = \quad (2) \\
&= \int_0^\tau \mathcal{E}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}\,;\,x'y')\,dt + \int_0^\tau [F(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}) - \overset{0}{F}]\,s'\,dt + \\
&\quad + \int_0^\tau [(x' - \overset{0}{x'}s')\,F'_{x'}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}) + (y' - \overset{0}{y'}s')\,F'_{y'}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'})]\,dt
\end{aligned}
\tag{21}
$$

poichè per le note proprietà di omogeneità di F è

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}\,;\,x'y') &= x'[F'_{x'}(xy\,;\,x'y') - F'_{x'}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'})] + \\
&\quad + y'[F'_{y'}(xy\,;\,x'y') - F'_{y'}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'})] = \\
&= F(xy\,;\,x'y') - F(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'})s' - (x' - \overset{0}{x'}s')\,F'_{x'}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}) - \\
&\quad - (y' - \overset{0}{y'}s')\,F'_{y'}(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}).
\end{aligned}
$$

Sviluppiamo mediante la formula di Taylor la differenza contenuta nel secondo integrale dell'ultimo membro di (21): da (5) si avrà

$$
\begin{aligned}
\int_0^\tau [F(xy\,;\,\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}) - \overset{0}{F}]\,s'\,dt &= \int_0^\tau \omega(\overset{0}{F}'_x\overset{0}{y'} - \overset{0}{F}'_y\overset{0}{x'})\,s'\,dt + \\
+ \frac{1}{2!}\int_0^\tau \omega^2 [\overset{0}{F}''_{x^2}\overset{0}{y'^2} - 2\,\overset{0}{F}''_{xy}\overset{0}{x'}\overset{0}{y'} + \overset{0}{F}''_{y^2}\overset{0}{x'^2}]\,s'\,dt &+ \frac{1}{3!}\int_0^\tau \lambda'\omega^3\,s'\,dt
\end{aligned}
\tag{22}
$$

dove λ' è un polinomio in $\overset{0}{x'}\overset{0}{y'}$, i cui coefficienti sono valori delle derivate

(1) Questi Rendiconti, pag. 541. In questa Nota per maggiore comodità la numerazione dei n. e delle formule continua quella della Nota precedente.

(2) In questo e negli integrali che seguono quando la variabile di integrazione è t si sottintende che nelle funzioni di s si pone per s la $s(t)$ definita nel n. 2. Si noti ancora che generalmente la formula del cambiamento delle variabili negli integrali si enuncia nell'ipotesi che il cambiamento di variabile sia invertibile: però almeno per scrivere l'uguaglianza che qui ci bisogna $\int_0^\tau \overset{0}{F}(s)\,ds = \int_0^\tau \overset{0}{F}(s(t))\,s'dt$, tale ipotesi non è necessaria; cfr. ad es. Baire, *Leçons sur les théories générales de l'analyse*, vol. I, pag. 82.

terze di F calcolati per i valori $\overline{x}, \overline{y}, \mathring{x}', \mathring{y}'$, dove $\overline{x}, \overline{y}$ rappresentano convenienti valori intermedii tra $\mathring{x}, \mathring{y}$ e x, y: sarà dunque $|\lambda'| < 8M$. Ma $\mathring{\mathfrak{C}}$ è un estremale: quindi $\mathring{F}'_x s' = \frac{d}{dt}\mathring{F}'_{x'}$; $\mathring{F}'_y s' = \frac{d}{dt}\mathring{F}'_{y'}$: onde

$$\int_0^\tau \omega[\mathring{F}'_x \mathring{y}' - \mathring{F}'_y \mathring{x}']\, s'\, dt = \int_0^\tau \omega \left[\frac{d\mathring{F}'_{x'}}{dt}\mathring{y}' - \frac{d\mathring{F}'_{y'}}{dt}\mathring{x}'\right] dt =$$

$$= -\int_0^\tau \{\mathring{F}'_{x'}(\omega'\mathring{y}' + \omega\mathring{y}''s') - \mathring{F}'_{y'}(\omega'\mathring{x}' + \omega\mathring{x}''s')\}\, dt\,.$$

Per (6) questo integrale coincide coll'ultimo integrale di (21), colla sola differenza che in $F'_{x'}, F'_{y'}$ a xy sono sostituiti $\mathring{x}\mathring{y}$. Segue che

$$\int_0^\tau \omega[\mathring{F}'_x \mathring{y}' - \mathring{F}'_y \mathring{x}']\, s'\, dt +$$

$$+ \int_0^\tau \{(x' - \mathring{x}'s')\, F'_{x'}(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}') + (y' - \mathring{x}'s')\, F'_{y'}(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}')\}\, dt =$$

$$= \int_0^\tau \{(\omega'\mathring{y}' + \omega\mathring{y}''s')\,(F'_{x'}(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}') - \mathring{F}'_{x'}) -$$

$$- (\omega'\mathring{x}' + \omega\mathring{x}''s')\,(F'_{y'}(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}') - \mathring{F}'_{y'})\}\, dt =$$

$$= \int_0^\tau \omega\omega' [\mathring{F}''_{x'x}\mathring{y}'^2 - (\mathring{F}''_{x'y} + \mathring{F}''_{y'x})\mathring{x}'\mathring{y}' + \mathring{F}''_{y'y}\mathring{x}'^2]\, dt +$$

$$+ \int_0^\tau \omega^2 [\mathring{F}''_{x'x}\mathring{y}'\mathring{y}'' - \mathring{F}''_{x'y}\mathring{x}'\mathring{y}'' - \mathring{F}''_{xy'}\mathring{x}''\mathring{y}' + \mathring{F}''_{yy'}\mathring{x}'\mathring{x}'']\, s'\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2!}\int_0^\tau [\omega'\omega^2\lambda'' + \omega^3 ks'\lambda''']\, dt\,,$$

dove λ'' e λ''' sono espressioni analoghe a λ', e cioè polinomii di 3° grado in $\mathring{x}'\mathring{y}'$, per cui si verifica ancora che $|\lambda'| < 8M, |\lambda''| < 8M$. Integriamo per parti il primo integrale dell'ultimo membro di questa relazione e ricordiamo (22), avremo subito:

$$\int_0^\tau (F(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}') - \mathring{F})\, s'\, dt +$$

$$+ \int_0^\tau \{(x' - \mathring{x}'s')\, F'_{x'}(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}') + (y' - \mathring{y}'s')\, F'_{y'}(xy\,;\, \mathring{x}'\mathring{y}')\}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\tau \omega^2 \left\{\left(\mathring{F}''_{x^2} - \frac{d\mathring{F}''_{x'x}}{ds}\right)\mathring{y}'^2 - \left(2\mathring{F}''_{xy} - \frac{d(\mathring{F}''_{x'y} + \mathring{F}''_{y'x})}{ds}\right)\mathring{x}'\mathring{y}' +\right.$$

$$\left. + \left(\mathring{F}''_{y^2} - \frac{d\mathring{F}''_{y'x}}{ds}\right)\mathring{x}'^2 - \left(\mathring{F}''_{x'y} - \mathring{F}''_{y'x}\right)k\right\} s'\, dt +$$

$$+ \frac{1}{3!}\int_0^\tau \omega^2 [3\omega'\lambda'' + s'\omega(\lambda' + 3\lambda''' k)]\, dt.$$

Rammentiamo il valore di F_2 [1] e le limitazioni sopra ottenute per $\lambda', \lambda'', \lambda'''$: otterremo subito, sostituendo in (21)

$$\Delta I = \int_0^\tau \mathcal{E}(xy\,;\,\mathring{x}'\mathring{y}'\,;\,x'y')\,dt + \frac{1}{2}\int_0^\tau \omega^2\,\mathring{F}_2\,s'dt + \frac{1}{3!}\int_0^\tau \omega^2(\lambda_1\omega + \lambda_2\omega')\,dt,$$

dove $\lambda_1 = s'(\lambda' + 3\lambda'''k)$, $\lambda_2 = 3\lambda''$ sono funzioni di t tali che

$$|\lambda_1| < 16M\,(1+3\varkappa)\ ,\ |\lambda_2| < 24M\,. \tag{23}$$

Sostituendo nella formula precedente la (19), si ha

$$\Delta I = \int_0^\tau \left\{\frac{1}{2}\,(\mathring{F}_1\omega'^2 + \mathring{F}_2\omega^2 s') + (\lambda_5\omega + \lambda_3\omega')\,\omega'^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3!}\,(\lambda_1\omega + \lambda_2\omega')\,\omega^2 + \lambda_4(1 - (1+k\omega)\,s')\right\} dt\,.$$

Essendo λ_3 e λ_4 discontinue gli integrali si intenderanno qui nel senso di Lebesgue. Inoltre essendo $\lambda_4 = 0$ in χ, l'integrale relativo all'ultimo termine potrebbe estendersi a χ_1 soltanto.

5. Ciò posto si introduca l'ipotesi 3ª: e sia $u(s)$ una soluzione di

$$\frac{d}{ds}\,(\mathring{F}_1 u') - \mathring{F}_2 u = 0 \tag{24}$$

finita, di classe C'' e $\neq 0$ in $(0\,,\sigma)$. Supponiamo precisamente

$$0 < m_1 \leq u \leq m_2 \qquad |u'| \leq m_3\,. \tag{25}$$

Poniamo

$$\omega(t) = p(t)\,u(s(t))\,; \tag{26}$$

$p(t)$ si annullerà per $t = 0$ e $t = \tau$. Sarà inoltre per (8), $(8)^{bis}$ e (25), e ricordando che si suppone $|\omega| < r$ con $r < 1$,

$$|p| < \frac{r}{m_1}\ ,\ |p'| = \left|\frac{\omega' - pu's'}{u}\right| < \frac{m_1 + 2m_3}{m_1^2}\,. \tag{27}$$

Inoltre ricordando che in χ è $s' > 0$, sarà per (11)

$$\int_0^\tau p'^2u^2\,dt \geq \int_\chi p'^2\,u^2\,dt = \int_\chi (\omega'^2 - p^2u'^2s'^2 - 2pp'uu's')\,dt =$$
$$= \int_\chi [(1+(1+k\omega)\,s')\,(1-(1+k\omega)\,s') - (p^2u^2s' + 2pp'uu')\,s']\,dt \geq$$
$$\geq \int_\chi [1 - s'\,(1 + k\omega + p^2\,u'^2\,s' + 2pp'uu')]\,dt \geq \tag{28}$$
$$\geq \int_\chi [1 - s'(1 + Hr)]\,dt = \chi - (1 + Hr)\int_\chi s'dt$$

[1] Cfr. ad es. Kneser Lehrbuch der Variationsrechnung, pag. 92.

dove per $(8)^{bis}$ e (26) si pone

$$H = \varkappa + 2\frac{m_3^2}{m_1^2} + 2\frac{m_1 + 2m_2}{m_1^2} m_3 ;$$

il numero H dipende quindi da $\varkappa, m_1, m_2, m_3$ soltanto.

Trasformiamo ancora d'altra parte l'espressione ΔI mediante la posizione (26): per essa e per (24) avremo

$$\int_0^\tau \overset{\circ}{F}_2 \omega^2 s' dt = \int_0^\tau p^2 u \frac{d}{dt}(\overset{\circ}{F}_1 u')\, dt = -\int_0^\tau \overset{\circ}{F}_1 u' \frac{d}{dt}(p^2 u)\, dt$$

onde

$$(29)\quad \int_0^\tau (\overset{\circ}{F}_1 \omega'^2 + \overset{\circ}{F}_2 \omega^2 s')\, dt = \int_0^\tau \overset{\circ}{F}_1 p'^2 u^2\, dt + \\ + \int_0^\tau \overset{\circ}{F}_1 p u' (p u' s' + 2 p' u)(s' - 1)\, dt .$$

Osserviamo ancora che si può scrivere

$$(30)\quad \overset{\circ}{F}_1 (1 - s') = \lambda_6 \omega' + \lambda_7 \omega + \lambda_8 (1 - (1 + k\omega) s')$$

dove

$$(31)\quad \begin{aligned} &|\lambda_6| < M \quad , \quad |\lambda_7| < 2M\varkappa , \\ &\lambda_8 = 0 \quad \text{in } \chi \quad , \quad |\lambda_8| < M \quad \text{in } \chi_1 . \end{aligned}$$

Basta porre infatti

$$\lambda_6 = \overset{\circ}{F}_1 \frac{1 - (1 + k\omega) s'}{\omega'} = \overset{\circ}{F}_1 \frac{\omega'}{1 + (1 + k\omega) s'} \quad , \quad \lambda_7 = \overset{\circ}{F}_1 k s' \quad , \quad \lambda_8 = 0 \text{ in } \chi$$

$$\lambda_6 = 0 , \qquad \lambda_7 = \overset{\circ}{F}_1 k s' \quad , \quad \lambda_8 = \overset{\circ}{F}_1 \text{ in } \chi_1 .$$

Sostituendo (29) e (30) nell'espressione trovata di ΔI, avremo

$$(32)\quad \begin{aligned} \Delta I = &\int_0^\tau \left[\frac{1}{2}\overset{\circ}{F}_1 + \lambda_5 \omega + \lambda_3 \omega'\right] p'^2 u^2\, dt + \\ &+ \int_0^\tau \left\{ \frac{1}{3!} (\lambda_1 \omega + \lambda_3 \omega') \omega^2 + \left[\left(\lambda_5 s' - \frac{1}{2}\lambda_7\right) \omega + \right.\right. \\ &\left.\left. + \left(\lambda_3 s' - \frac{1}{2}\lambda_6\right) \omega' \right] p u' [p u' s' + 2 p' u] \right\} dt + \\ &+ \int_{\chi_1} \left[\lambda_4 - \frac{1}{2}\lambda_8 p u' (p u' s' + 2 p' u) \right] (1 - (1 + k\omega) s')\, dt = \\ &= J_1 + J_2 + J_3 . \end{aligned}$$

Valutiamo questi 3 integrali. Per (20) si ha

$$J_1 \geq \frac{\mu_1}{2} \int_0^\tau p'^2 u^2 \, dt \,,$$

onde per (25) e (28) sarà in particolare

$$(33)_1 \qquad J_1 \geq \frac{\mu_1}{2} H_1 \int_0^\tau p'^2 \, dt$$

$$(33)_2 \qquad J_1 \geq \frac{\mu_1}{2} \chi - \frac{\mu_1}{2} (1 + Hr) \int_\chi s' dt \geq \frac{\mu_1}{2} \chi - \frac{\mu_1}{2} \int_\chi s' dt - H_2 r \chi \,,$$

$H_1 = m_1^2$, $H_2 = 2H$ essendo costanti positive indipendenti da r e τ e dipendenti solo da $M, \mu_1, \varkappa, m_1, m_2, m_3$. L'integrale J_2 è la somma di tanti integrali, i cui integrandi contengono un fattore limitato, in virtù delle disuguaglianze (15), (18), (23), (31), in funzione di $M, \mu_1, \varkappa, m_1, m_2, m_3$ soltanto ed un fattore di uno dei tipi p^3 , $p^2 p'$, $p p'^2$. Ma p annullandosi in 0 e τ è

$$\int_0^\tau p^2 \, dt \leq \frac{\tau^2}{\pi^2} \int_0^\tau p'^2 \, d\tau \qquad \int_0^\tau |pp'| \, d\tau \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau^2}{\pi^2}\right) \int_0^\tau p'^2 \, dt \,;$$

onde per J_2 sarà

$$(34)_1 \qquad |J_2| \leq (H_3 \tau^2 + H_4) \, r \int_0^\tau p'^2 \, d\tau \,;$$

H_3 , H_4 essendo costanti del solito tipo. Del resto per (27) si vede direttamente che si ha pure

$$(34)_2 \qquad |J_2| < H_5 \, r\tau \,,$$

H_5 essendo del solito tipo. Infine osservando che valgono ancora le (16), (31) sarà

$$J_3 \geq \left(\frac{\mu_1}{2} - H_6 r\right) \int_{\chi_1} [1 - (1 + k\omega) \, s'] \, dt \,;$$

onde se $r < \dfrac{\mu_1}{2H_6}$, sarà

$$(35)_1 \qquad J_3 > 0 \,,$$

e più precisamente in χ_1 avendosi $-2 \leq s' < 0$, sarà

$$(35)_2 \qquad J_3 \geq \left(\frac{\mu_1}{2} - H_6 r\right) \left[\chi_1 - (1 + \varkappa r) \int_{\chi_1} s' dt \right] \geq$$

$$\geq \frac{\mu_1}{2} \left(\chi_1 - \int_{\chi_1} s' dt \right) - H_7 r \chi_1 \,;$$

H_6 , H_7, essendo costanti del solito tipo.

Ciò posto, distinguiamo due casi secondo che $\tau \leq 2\sigma$ o $\tau > 2\sigma$.

1° Caso: $\tau \leq 2\sigma$. Per $(33)_1$, $(34)_1$, $(35)_1$ si avrà:

$$(36)_1 \qquad \Delta I > \left[\frac{H_1 \mu_1}{2} - (4\sigma^2 H_3 + H_4) r\right] \int_0^\tau p'^2 \, d\tau$$

onde basta imporre ancora ad r di essere $< \frac{H_1 \mu_1}{2(4\sigma^2 H_3 + H_4)}$ perchè sia $\Delta I > 0$.

2° Caso: $\tau > 2\sigma$. Si applichino le $(33)_2$, $(34)_2$, $(35)_2$ e si osservi che $\int_\chi s' dt + \int_{\chi_1} s' dt = \int_0^\tau s' dt = \sigma$, e che $\chi + \chi_1 = \tau$: si avrà

$$(36)_2 \qquad \Delta I \geq \frac{\mu_1}{2}(\tau - \sigma) - (H_2 \chi + H_7 \chi_1 + H_5 \tau) r \geq$$

$$\geq \left[\frac{\mu_1}{4} - (H_2 + H_7 + H_5) r\right] \tau ,$$

onde basta prendere $r < \frac{\mu_1}{4(H_2 + H_7 + H_5)}$ perchè sia $\Delta I > 0$.

Riassumendo, basterà quindi supporre che r sia minore del più piccolo dei numeri $1, \frac{1}{2\varkappa} H_1, \frac{\mu_1}{2H_6}, \frac{\mu_1}{2(4\sigma^2 H_3 + H_4)}, \frac{\mu_1}{4(H_2 + H_7 + H_5)}$, perchè $\mathfrak{E}$ dia il minimo rispetto a tutte le curve passanti per P_1 e P_2 per cui $|\omega| < r$.

c. d. d.

Osservazione. — È chiaro anche qui come nella Nota seconda che le formule $(36)_1$, $(36)_2$ contengono non solo il teorema da noi enunciato, ma anche il teorema di Osgood.

Errata corrige alla Nota I:

pag. 427 riga terza dal basso $-\eta' f'_y(x \mathring{y} \mathring{y}')$ leggi $-\eta' f'_{y'}(x \mathring{y} \mathring{y}')$

pag. 431 ultima riga della Nota $\Delta I \leq 0$ » $\Delta I \geq 0$.

Meccanica. — *Sul teorema di Whittaker.* Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In un lavoro attualmente in corso di stampa, dal titolo: *Esistenza di un'estremale chiusa dentro un contorno di Whittaker* (1), ho dimostrato un teorema del calcolo delle variazioni (2) in base al quale resta perfettamente giustificato il ben noto criterio di Whittaker (3) per la ricerca di orbite periodiche. Sulla validità di tale criterio si poteva avere qualche dubbio, nel ragionamento addotto dal Whittaker per giustificarlo essendo ammessa *a priori* l'esistenza di un minimo assoluto per una funzione continua d'infinite variabili.

In questa Nota espongo la dimostrazione del teorema di Whittaker che è implicitamente contenuta nel lavoro sopra ricordato, tralasciando tutti quei particolari della dicitura e del ragionamento che servono soltanto a renderla perfettamente rigorosa. Resterà così posto bene in evidenza il metodo cui è informata tale dimostrazione, e questo può avere qualche interesse, il metodo stesso prestandosi bene anche ad altre applicazioni.

Consideriamo in un piano (x, y) il movimento di un punto sotto l'azione di una forza conservativa derivante da un potenziale $V(x, y)$. Le traiettorie di un tale sistema dinamico per le quali sia h il valore della costante dell'energia, coincideranno colle estremali dell'integrale che misura « l'azione delle forze impresse »

$$\mathfrak{A} = \int \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

di modo che una curva ordinaria del piano (x, y) chiusa e senza punti angolosi ci fornirà un'orbita periodica di tale sistema dinamico per la quale

(1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXXIII.

(2) Il mio lavoro era completamente redatto quando nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » (Tomo XXXII, fasc. 3°) è comparsa una Memoria del prof. L. Tonelli, nella quale l'A. perviene a risultati sostanzialmente identici a quelli a cui sono arrivato io nel lavoro in questione. Nondimeno non credo del tutto priva d'interesse la pubblicazione di tale lavoro e della presente Nota, perchè il metodo di cui mi sono servito è del tutto differente dal metodo delle « successioni minimizzanti » di cui si è servito il prof. Tonelli, e non è, come quello, perfettamente comprensibile altro che a chi abbia familiari molte delle più delicate questioni di analisi.

(3) Monthly Notices R. A. S., LXII, pag. 186.

sia h il valore della costante dell'energia, allora e allora soltanto che sia un'estremale chiusa dell'integrale $\mathfrak{A}$.

Dati due punti P, Q del piano (x, y), tutte le volte che essi siano stati scelti sufficientemente vicini in base a ben noti teoremi relativi ai problemi di calcolo delle variazioni definiti, potrà affermarsi che esiste un'estremale di $\mathfrak{A}$ che congiunge i punti P, Q, differisce poco dal segmento $\overline{PQ}$, e fornisce per l'integrale $\mathfrak{A}$ un valore minore di quello che per l'integrale stesso è fornito da una qualunque altra curva ordinaria del piano (xy) congiungenti i punti P, Q.

Nel seguito chiameremo tale estremale il *segmento estremale* che unisce i punti P, Q; diremo poi che un'area A del piano (x, y) è limitata da un *contorno di Whittaker* relativo all'integrale $\mathfrak{A}$, quando accada che il segmento estremale che unisce due punti molto vicini del contorno di A appartenga sempre interamente ad A.

Colle denominazioni introdotte, all'enunciato del teorema di Whittaker si può dare, senza diminuirne affatto la generalità, la forma seguente:

Se un'area A del piano (x, y), *limitata da un contorno di Whittaker relativo all'integrale*

$$\mathfrak{A} = \int \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

è multiplamente connessa (e quindi contiene circuiti non riducibili per deformazione continua ad un punto), esiste sempre tra questi circuiti un'orbita periodica del sistema dinamico considerato per la quale il valore della costante dell'energia è h, cioè un'estremale chiusa di $\mathfrak{A}$.

Prima di passare alla dimostrazione di questo teorema, osserveremo che la condizione che l'area A sia circondata da un contorno di Whittaker porta di conseguenza che il segmento estremale determinato da due punti molto prossimi appartenenti ad A appartiene interamente ad A anche se i due punti in questione non giacciono ambedue sul contorno di A. Infatti — potendosi dimostrare che una parte qualunque di un segmento estremale è ancora un segmento estremale — l'ipotesi contraria costringerebbe ad ammettere che è possibile trovare sul contorno di A due punti vicinissimi, congiungibili mediante un segmento estremale non appartenente interamente ad A.

Immaginiamo l'area A decomposta, mediante un doppio sistema R di archi di curve aventi i loro estremi sul contorno di A e appartenenti interamente ad A, in un numero finito N di areole (semplicemente connesse) $a_1, a_2, \ldots a_N$ così piccole che, scelto arbitrariamente un punto P sul contorno di una di esse a, esso possa esser congiunto mediante un segmento estremale ad un punto qualunque Q del contorno di a o di un'areola adiacente

(cioè tale che il suo contorno abbia almeno un punto in comune col contorno di a).

Chiameremo *spezzata estremale chiusa di p lati* ogni curva ordinaria chiusa (appartenente interamente ad A) che si possa immaginare ottenuta:

1° scegliendo sopra R una successione di p punti — che diremo *vertici* della spezzata estremale — tali che due qualunque successivi (e l'ultimo e il primo) appartengano al contorno di una stessa areola a;

2°) congiungendo ognuno di tali punti col successivo (e l'ultimo col primo) mediante il segmento estremale determinato dai punti stessi — che diremo *lato* della spezzata estremale —.

Potrà darsi il caso che più lati successivi di una spezzata estremale chiusa si raccordino nei vertici comuni e costituiscano un unico segmento estremale avente i suoi estremi sopra R ma non sul contorno di una stessa areola a: viceversa una curva chiusa costituita dall'insieme di più segmenti estremali aventi tutti i loro estremi sopra R, sarà sempre una spezzata estremale chiusa.

Indicheremo con n il massimo numero di lati che può fornire ad una spezzata estremale chiusa un segmento estremale avente i suoi estremi sopra R: numero che sarà certamente finito, un segmento estremale non potendo avere in comune con R altro che un numero finito di punti. Per la nostra dimostrazione è essenziale prendere in esame la varietà di curve Σ costituita dalle spezzate estremali chiuse che:

1° avvolgono uno almeno dei contorni interni di A;

2° non hanno più di $N + n - 2$ lati.

Tale varietà dipende da un numero *finito* di parametri, quindi l'insieme dei valori assunti da $\mathcal{A}$ sulle spezzate appartenenti a Σ ammetterà un minimo assoluto a cui corrisponderanno una o più spezzate della varietà stessa che diremo minimizzanti.

Evidentemente il nostro teorema resterà dimostrato se faremo vedere che ciascuna delle spezzate minimizzanti non ha punti angolosi: perchè ciò porta di conseguenza che ciascuna di tali spezzate è un'estremale chiusa dell'integrale $\mathcal{A}$.

Cominciamo dal dimostrare che una spezzata minimizzante S_m non può avere più di N lati.

Se S_m ha più di N lati, due almeno di essi dovranno avere ambedue gli estremi sul contorno di una stessa areola a. Siano allora P, Q due vertici di S_m appartenenti ai due lati in questione, ma non consecutivi sulla S_m. I due punti P, Q giacendo sul contorno di una stessa areola a, esisterà un segmento estremale avente per estremi i punti stessi: segmento estremale che non farà parte della S_m — perchè i suoi estremi appartengono al contorno di una stessa areola a e non sono vertici consecutivi di S_m — e co-

stituirà insieme a ciascuna delle due successioni di segmenti estremali in cui la S_m resta decomposta dai punti P, Q, due spezzate estremali chiuse $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$. Per la proprietà di minimo dei segmenti estremali, è evidente che su ciascuna di queste due spezzate il valore di $\mathfrak{A}$ è minore che sulla S_m. D'altra parte, appartenendo S_m alla varietà Σ, uno almeno dei contorni interni di A dovrà essere incluso in S_m, e quindi anche in $S_m^{(1)}$ o $S_m^{(2)}$, essendo queste due curve totalmente interne ad A. Vediamo dunque che l'ipotesi che S_m abbia più di N lati porta di conseguenza che esiste un elemento di Σ pel quale il valore di $\mathfrak{A}$ è minore che su S_m, e questo è assurdo.

Dimostrato che S_m non può avere più di N lati, potremo far vedere facilmente che S_m non ha punti angolosi.

Supposto infatti che S_m abbia un punto angoloso, sopprimiamo in S_m i due lati ad esso adiacenti, e congiungiamo gli estremi P, Q della curva aperta così ottenuta (cioè punti appartenenti al contorno di una stesso areola a o di due areole a adiacenti) mediante il segmento estremale da essi individuato. Per provare il nostro asserto, basterà dimostrare che la curva chiusa S_m^* cui così perveniamo è una spezzata estremale chiusa della varietà Σ, perchè per la proprietà di minimo dei segmenti estremali possiamo esser sicuri che il valore dell'integrale $\mathfrak{A}$ sopra S_m^* è minore che sopra S_m.

Intanto S_m^* è certamente una spezzata estremale chiusa, essendo costituita dall'insieme di più segmenti estremali aventi i loro estremi sopra R. Inoltre il numero dei suoi lati non può superare $N + n - 2$, perchè il segmento estremale avente i suoi estremi in P e Q può fornire alla S_m^* al più n lati, e d'altra parte il numero dei lati di S_m, per quanto abbiamo precedentemente dimostrato, non può superare N. Infine è facile vedere che in S_m^* è incluso uno almeno dei contorni interni di A: basta per questo aver presente che uno almeno di tali contorni è incluso in S_m.

La S_m^* è dunque una spezzata estremale chiusa della varietà Σ, e ciò è sufficiente, come abbiamo già detto, per dimostrare il nostro asserto.

Osserveremo infine che ogni spezzata minimizzante rende minimo $\mathfrak{A}$ non solo in Σ ma anche nella varietà (Σ) costituita da tutte quante le curve ordinarie chiuse interne ad A, che avvolgono uno almeno dei contorni di A. Infatti se C è una tale curva, esisterà sempre una spezzata S di Σ avente i suoi vertici sopra C. Il valore di $\mathfrak{A}$ sopra C sarà certamente superiore al valore di $\mathfrak{A}$ sopra S, e questo prova quanto volevamo.

L'esistenza di un minimo assoluto per l'insieme dei valori assunti da $\mathfrak{A}$ sulla varietà (Σ), è appunto ciò che è ammesso *a priori* nel ragionamento addotto dal Whittaker per giustificare il suo criterio per la ricerca di orbite periodiche.

Fisica. — *Masse luminose del Righi in scariche ottenute con differenza di potenziale alternativa.* Nota di Lavoro Amaduzzi, presentata dal Socio A. Righi.

1. Lo studio delle scariche elettriche si è fatto in condizioni varie per ciò che riguarda il materiale da esse attraversato e per ciò che riguarda il carattere della differenza di potenziale eccitatrice. Vi è però un caso che merita attenzione e che, per quanto mi consta non è stato preso in esame attento e sistematico da alcuno: è quello in cui si faccia uso di una conveniente differenza di potenziale alternativa. Non entra manifestamente in questa categoria di differenze di potenziale quella che provoca la scarica oscillatoria, giacchè nella migliore delle circostanze si è sempre di fronte ad un processo di smorzamento che nuoce alla produzione di uno stato di regime per qualche tempo costante.

E (sia permesso dire qui per incidenza ciò che qualche esperienza sembra bene dimostrare) in materia di scariche in generale, forse è corretto parlare oltre che di *periodo preparatorio* privo di effetti luminosi, di un *periodo variabile* che precede il *periodo permanente* o *di regime*, accompagnato come questo da effetti luminosi.

Una differenza di potenziale alternativa più o meno rigorosamente sinussoidale reca con sè, nel modo più semplice e regolare, una periodicità che può consentire lo stabilirsi di una condizione di regime nell'oscillare della polarità agli elettrodi. E questa mi sembra una condizione di studio degna di considerazione; ragione per cui ho su questa via intraprese alcune ricerche.

2. Di alcuni risultati di queste ricerche intendo brevemente riferire in questa Nota. Si tratta di un particolare e bello aspetto che assume la scarica in un gas con differenza di potenziale alternativo in corrispondenza di certi valori della pressione che oscillano fra i 10 ed i 15 mm. di mercurio.

Quando si è raggiunta tale pressione, la scarica è costituita da chiazze luminose (rosso-violacee nell'aria e di altro colore in altri gas) di una certa estensione, separate da intervalli pressochè oscuri e disposte in linea fra un elettrodo e l'altro. A questa successione di chiazze ovoidali molto allungate è posto limite ai due lati da pennacchi dello stesso loro colore che partono dagli elettrodi. Questi poi sono coinvolti alla superficie laterale da una aureola di color violaceo.

Indico qui in succinto i principali elementi raccolti da un esame del fatto, riserbando ad una Memoria più estesa la descrizione del dispositivo

sperimentale, le particolarità del fatto medesimo e quelle congetture sulla sua natura che qui sotto mi limito ad accennare.

a) Il fenomeno netto si produce entro un intervallo ristretto di pressione, al disotto del quale muta di aspetto.

b) Tale intervallo apparisce dipendere da varî elementi, quali la forma degli elettrodi, la distanza di questi, la natura del gas.

c) Entro i limiti fissati da tale intervallo, a parità di tutti gli altri elementi, il numero delle masse diminunisce colla pressione aumentando di lunghezza.

d) Fissa la pressione, il numero delle masse, che hanno per quella pressione una certa lunghezza, diminuisce col diminuire della distanza degli elettrodi, sino a ridursi a zero quando la distanza fra gli elettrodi sia all'incirca inferiore all'estensione occupata dai due pennacchi agli elettrodi e da una massa mediana.

e) L'aumento di autoinduzione nel circuito al quale appartiene il primario del trasformatore usato per ottenere la necessaria differenza di potenziale alternativa, fa diminuire il numero delle masse luminose aumentandone la lunghezza.

f) Un effetto molto marcato della variazione di autoinduzione nel circuito al quale appartiene il primario si ha sull'aspetto della scarica anche in quei casi nei quali la troppo piccola distanza fra gli elettrodi non dà che i due pennacchi agli elettrodi.

3. Osservazioni della scarica descritta allo specchio girante e sotto la influenza di un opportuno campo magnetico, mostrano in modo abbastanza chiaro che essa è una particolare manifestazione del noto fenomeno delle masse luminose in moto [1] del Righi. E consentono di riattaccare a questo medesimo fenomeno certi risultati da me altra volta ottenuti [2], producendo in gas rarefatti la scarica di un rocchetto di Ruhmkorff usato con interruttore elettrolitico.

Chimica-fisica. — *Idrolisi di sali dei metalli bi- e trivalenti.* 2ª Nota preliminare di F. Ageno e di E. Valla, presentata dal Socio R. Nasini.

Chimica-fisica. — *Sulla ripartizione della soda fra acido borico e acido carbonico.* Nota di F. Ageno, presentata dal Socio R. Nasini.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

[1] Memorie Accad. Bologna, 1891 e 1895; Questi Rendiconti, 19 aprile 1891.
[2] Nuovo Cimento, serie V, tomo X, 1905.

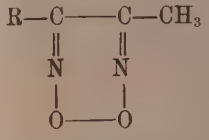
Chimica. — *Sulla costituzione del diisoeugenolo* (1). Nota del dott. E. Puxeddu, presentata dal Corrisp. A. Peratoner.

Sulla costituzione del diisoeugenolo le nostre conoscenze sono assai limitate. Si ammette dai più che in esso sia presente un gruppo tetrametilenico, come aveva indicato Tiemann; a finora se il procedimento sintetico e le proprietà del composto rendono verosimile questo modo di vedere, non si è ancora riusciti a darne una prova sperimentale. A questo scopo io ho intrapreso una serie di esperienze.

In una Nota precedente (2) e in una di imminente pubblicazione ho dimostrato che esistono due eteri dietilici del diisoeugenolo che si devono ritenere molto probabilmente isomeri di struttura. Questo fatto è in accordo con la formula ciclometilecina. L'azione del bromo sul diisoeugenolo (3) conduce a un dibromuro, derivato di sostituzione, e l'azione del bromo sul dimetil- e dietildiisoeugenolo conduce a derivati monosostituiti. Per cui, tanto nel diisoeugenolo quanto nei suoi eteri la presenza dei doppî legami è da escludersi senz'altro.

La via più sicura per dimostrare la costituzione del diisoengenolo e dei composti analoghi è lo studio dei prodotti di ossidazione: al riguardo debbo dire che io ho in corso delle esperienze, che finora non mi hanno dato risultati decisivi, e che pubblicherò prossimamente quando saranno completate.

In questa Nota espongo le sintesi fatte, per azione della luce, sull'isoeugenolo e sui suoi eteri metilico, etilico e propilico, come anche i risultati negativi ottenuti nello studio comparativo sull'eugenolo e derivati. Ho studiato anche l'azione dell'acido nitroso sull'etilisoeugenolo e sul dietildiisoeugenolo. Il primo, comportandosi come il metilisoeugenolo studiato da Malagnini (4), dà luogo a un perossido al quale si attribuisce la seguente costituzione:



in cui il radicale R rappresenta $C_6H_3\begin{pmatrix}OCH_3\\OC_2H_5\end{pmatrix}$. Il dietildiisoeugenolo invece

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Cagliari.

(2) Gazz. Chim. It., 39, I, 131.

(3) Gazz. Chim. It., 39, I, 202.

(4) Gazz. Chim. It., 24, II, 7.

non reagisce affatto. Questo comportamento differenziale è, ai fini della costituzione del diisoeugenolo, di notevole rilievo. Infatti l'isafrolo, l'isapiolo, composti etilenici con catena laterale non satura dello stesso tipo dell'isoeugenolo, dànno, quando reagiscono con l'acido nitroso, dei perossidi analoghi a quello indicato più sopra. Se nel diisoeugenolo ci fossero delle catene non sature, queste dovrebbero reagire con l'acido nitroso nel senso ora ricordato: la prova fatta con il dietildiisoeugenolo esclude tale ipotesi.

Azione della luce sull' isoeugenolo.

L'isoeugenolo fornitomi da Kahlbaum, fu impiegato, senza ulteriore purificazione, in quasi tutte le esperienze: ma furono anche fatte preparazioni di diisoeugenolo col prodotto purificato per distillazione. Gr. 100 di isoeugenolo puro si sciolgono in 200 c. c. di alcool ordinario e vi si aggiungono 25 c. c. di acido cloridrico fumante. La miscela si espone alla luce in una canna di vetro chiusa alla lampada. Dopo pochi minuti la soluzione alcoolica si colora in giallo un po' bruno e incomincia la polimerizzazione. I cristalli si depongono dopo una mezz'ora circa, e la formazione del diisoeugenolo procede rapidamente tanto che in poche ore si può raccogliere oltre il 50 % dell'isoeugenolo impiegato, sotto forma di polimero solido cristallizzato.

Raccogliendo invece il precipitato dopo due giorni, il rendimento è del 60 %. La polimerizzazione è in seguito lentissima; ma continua sempre, dando origine a un prodotto meno puro ma che è sempre il diisoeugenolo. Filtrando dopo due giorni il diisoeugenolo formatosi ed esponendo nuovamente alla luce il liquido limpido filtrato, dopo due giorni si raccolgono altri 7 gr. di polimero; filtrando ancora ed esponendo il filtrato all'azione della luce, si ottiene una grossa quantità di diisoeugenolo, e così si può continuare per parecchie volte fino ad ottenere una resa totale che non è mai inferiore al 75 %. Si può anzi dire che la polimerizzazione tende verso un limite che viene raggiunto dopo molto tempo. Le acque madri presentano una magnifica fluorescenza azzurra.

Il liquido alcoolico restante dopo la separazione del diisoeugenolo, formatosi in più riprese, è stato evaporato a bagno maria ed ha lasciato un residuo oleoso bruno. Quest'ultimo, lavato con acqua, si rapprende pian piano fino a diventare una polvere bruna amorfa, friabile, mischiata con sostanza resinosa. Sciolta in alcool ed abbandonata a sè, non lascia deporre che piccolissima quantità di diisoeugenolo impuro. La maggior parte riprecipita sotto forma di olio denso bruno.

Impiegai 100 gr. di diisoeugenolo grezzo che cristallizzai dall'alcool raccogliendolo successivamente in sei distinte porzioni. Ciascuna di queste fu poi ricristallizzata a parte parecchie volte fino a punto di fusione costante. Tutte queste porzioni hanno la stessa forma cristallina e fondono alla stessa

temperatura (180°). Non è il caso quindi di supporre che nella polimerizzazione dell'isoeugenolo per azione della luce prendano origine degli isomeri.

La quantità di acido cloridrico da impiegare per provocare la polimerizzazione può variare: si può dire in generale che bastano pochi c. c. di acido per dare origine a notevole quantità di diisoeugenolo. All'acido cloridrico ho sostituito l'acido solforico in diverse prove. In una, gr. 10 di isoeugenolo furono sciolti in c. c. 50 di alcool con aggiunta di gr. 10 di H_2SO_4 e gr. 30 di acqua. Furono tenuti esposti alla luce per tre mesi, senza che si separasse il diisoeugenolo; ma raffreddando la soluzione, una piccola quantità di polimero si deposita e la polimerizzazione continua con estrema lentezza. Altre esperienze furono eseguite con cloruro di calcio e cloruro di zinco al posto dell'acido cloridrico, ma, dopo cinque mesi d'insolazione, non si è separato del diisoeugenolo nemmeno in tracce. All'acido cloridrico spetta pertanto la massima attività polimerizzante così in questa come nelle altre reazioni descritte in seguito; ed il meccanismo della reazione è probabilmente da ricercarsi nella decomposizione di questo prodotto d'addizione con conseguente sintesi del polimero.

Dimetildiisoeugenolo.

Partii dal metilisoeugenolo preparato per azione del solfato dimetilico sull'isoeugenolo. Gr. 10 di metilisoeugenolo puro, distillato a 162°-163° e a pressione normale, si sciolgono in 30 c. c. di alcool ordinario con aggiunta di 5 c. c. di acido cloridrico fumante. La miscela si mette in un tubo di vetro chiuso alla lampada. Dopo alcune ore di esposizione alla luce solare diretta, la soluzione ingiallisce: e sebbene il polimero non si depositi subito, pure è da ritenersi che esso prenda origine assai presto. Dopo tre giorni d'insolazione, evaporando un po' di alcool e lasciando raffreddare, si depositano abbondantemente i cristalli del dimetildiisoeugenolo in piccoli ammassi. Il prodotto purificato si mostra identico col dimetildiisoeugenolo già conosciuto, col suo punto di fusione di 106°. È stato attribuito a questo etere un punto di fusione più largo: e veramente, quando lo si purifichi per semplice cristallizzazione dall'alcool, non si giunge mai a un punto di fusione superiore a 96°. Per arrivare a 106° si deve cristallizzarlo o dall'etere di petrolio o da un miscuglio di etere solforico ed etere di petrolio.

Dietildiisoeugenolo.

L'etilisoeugenolo, preparato per azione del solfato etilico sull'isoeugenolo, si presenta in scaglie brillanti, quasi incolore, fondenti a 64°. Di esso ho sciolto 10 gr. in alcool ordinario in presenza di piccole quantità di acido

cloridrico. Dopo poche ore di esposizione alla luce solare diretta, la soluzione alcoolica si colora in giallo-rosso: abbbandona dopo due giorni una massa cristallina abbondante, costituita da aghi prismatici. Il prodotto purificato concorda nelle sue proprietà col dietildiisoeugenolo da me ottenuto in varii modi.

Dipropildiisoeugenolo

Il propilisoeugenolo necessario per la reazione l'ho preparato nel seguente modo: Gr. 10 di isoeugenolo si sciolgono in 60 c. c. di alcool propilico puro. A questa soluzione se ne aggiunge un'altra di gr. 2 di sodio nello stesso alcool con aggiunta di un eccesso di ioduro di propile. La miscela si riscalda a bagno maria per 15 ore. Il prodotto della reazione si lascia evaporare sino a piccolo volume; poi si riprende con acqua. Col riposo, si depongono dei bellissimi cristalli incolori e un olio rosso bruno che odora di isoeugenolo. La parte cristallizzata, lavata accuratamente con potassa e acqua e poi cristallizzata dall'alcool ordinario, dà il propilisoeugenolo puro. Anche l'olio rosso-bruno, agitato con potassa, abbondona una parte densa che si solidifica dando nuova quantità di propilisoeugenolo.
gr. 0,2788 di sostanza : gr. 0,7735 di CO_2 e gr. 0,2308 di H_2O

	Trovato %	Calcolato per $C_{13}H_{18}O_2$
C	75,6	75,7
H	8,8	8,7

Il propilisoeugenolo si presenta in aghi prismatici lunghi, riuniti in fascetti o in croce: fonde a 54°, senza decomporsi, in un liquido trasparente. È solubile in alcool, etere e benzolo. Per preparare il polimero di questo etere, se ne impiegarono 10 gr. sciolti in alcool con aggiunta di 5 gr. di acido cloridrico concentrato. Dopo due giorni la soluzione depone una massa cristallina che è stata purificata per ripetute cristallizzazioni dall'alcool.
gr. 0,2020 di sostanza : CO_2 gr. 0,5583 ; H_2O gr. 0,1694

	Trovato %	Calcolato per $(C_{13}H_{18}O_2)_2$
C	75,3	75,7
H	9,3	8,7

Il dipropildiisoeugenolo cristallizza in aghi prismatici. È insolubile negli idrati alcalini. Si scioglie nei solventi organici, come etere, benzolo. Il suo punto di fusione è a 94°.

Azione della luce sull'eugenolo e sui suoi eteri.

Parallelamente alle reazioni dinanzi descritte, fu studiata l'azione della luce sull'eugenolo e sugli eteri metilico ed etilico. L'eugenolo in soluzione alcoolica con aggiunta di acido cloridrico, dopo una lunga insolazione, si è colorato in giallo bruno, ma non ha dato nessuna sostanza nuova, almeno in quantità apprezzabile. In varie prove fatte usando altri reagenti al posto dell'acido cloridrico non ho potuto ottenere risultati migliori. Anche il metil- e l'etileugenolo non mostrano nessuna tendenza a trasformarsi o a polimerizzarsi per azione della luce. In diversi saggi fatti con questi due eteri purissimi, essi sono restati affatto inalterati, senza neanche cambiar di colore.

Azione dell'acido nitroso sull'etilisoeugenolo e sul dietildiisoeugenolo.
(Perossido del diisonitrosoisoetileugenolo).

Gr. 13,6 di etilisoeugenolo puro si sciolgono in gr. 50 di acido acetico anidro: a questa soluzione raffreddata esteriormente, si aggiunge, goccia a goccia, una soluzione concentratissima di nitrato potassico (14 gr.) in acqua. Quando si è aggiunto tutto il nitrito, il liquido rosso-bruno si lascia in riposo per 20 ore. Si depone una sostanza cristallina gialla, che, separata per filtrazione e cristallizzata dall'alcool fonde, a 85°.

Sostanza gr. 0,3138 : CO^2 gr. 0,6605 : H_2O gr. 0,1672.
» » 0,1780 : N c. c. 17,8 alla temp. di 21,5 e alla pr. di 753.

	Trovato %	Calcolato per $C_{12}H_{14}O_4N_2$
C	57,4	57,6
H	5,9	5,6
N	11,2	11,2

Il perossido è cristallizzato in prismi tabulari, poco solubili in acqua, assai solubili in alcool. Per azione della potassa alcoolica fornisce un isomero.

L'azione dell'acido nitroso sul dietildiisoeugenolo fu fatta comparativamente. Gr. 10 dell'etere, sciolti in piccole quantità di acido acetico, furono trattati con nitrito potassico nel modo descritto più avanti. Dopo una giornata di riposo, il prodotto della reazione, che non aveva lasciato deporre nessuna sostanza cristallizzata, fu ripreso con acqua ma non si potè separare altro che dietildiisoeugenolo inalterato.

Chimica. — *Sui chetoni derivati dall'isomiristicina* [1]. Nota di Everardo Scandola, presentata dal Socio G. Ciamician.

È noto che i derivati bibromurati degli eteri fenolici a catena laterale propenilica, trattati con metilato od etilato sodico, dànno, per distillazione in corrente di vapore del prodotto della reazione, i corrispondenti chetoni saturi col carbonile in posizione α rispetto al nucleo aromatico.

È pure dimostrato [2] che tale formazione è dovuta alla saponificazione di un etere ossido non saturo $R.C(OR)\,C=CH.CH_3$ ed alla conseguente trasposizione molecolare che subisce l'alcool terziario che ne deriva.

Tale reazione fu applicata a numerosi composti di questo tipo: così Wallach e Pond prepararono l'α-chetone dell'anetolo, dell'isoetileugenolo, dell'isosafrolo [3], Hell e Hollemberg quello del monobromoeugenolo [4], più recentemente I. Pond, O. P. Maxwell e G. M. Norman ottennero l'α-chetoisoapiolo [5]; Paolini infine preparò il chetoasarone.

Ho voluto applicare tale reazione ad una sostanza che da non molto tempo è entrata nel novero dei derivati propenilici [6], all'isomiristicina.

A tale scopo ho preparato il bibromuro di isomiristicina secondo le prescrizioni di Thoms [7]. Gr. 16 di tale composto sciolti nella minima quantità di alcool metilico assoluto vennero versati in una soluzione di gr. 4,4 di sodio in 64 cc. di alcool metilico assoluto. La reazione non avviene subito ma, per riscaldamento a b. m., comincia a separarsi bromuro di sodio; è bene prolungare il riscaldamento per alcune ore. Si elimina poi l'alcool metilico per distillazione ed il residuo si riprende con acqua e si sottopone alla distillazione in corrente di vapore. Passa lentamente un olio leggermente giallognolo che, estratto con etere e seccato (dopo distillazione dell'etere) nel vuoto su acido solforico e paraffina, costituisce l'α-chetone greggio.

Il rendimento considerato in chetone greggio è pressochè teorico.

Il chetone, sotto forma di un olio giallo bruno, piuttosto denso, fu sottoposto alla distillazione frazionata nel vuoto.

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica della R. Università di Pavia.

[2] Vedi Hell e Portmann, Ber. 29, I (1896), pag. 680.

[3] Ber. 28. 2715 e seguenti.

[4] Ber. 29, 676.

[5] C. B. 1899 (2), 1117.

[6] Rimini, Gazz. XXXIV (II), pag. 281; Gazz. XXXV (I), pag. 406; Rimini e Olivari, Rendic. dell'Acc. dei Lincei, 1907, pag. 663.

[7] Ber. 36, 3446.

Alla pressione di 20 mm. passò tutto da 204° a 225°, la frazione da 210° a 225°, lasciata a sè, cristallizzò dopo qualche giorno in aghetti che asciugati tra carta bibula, e cristallizzati ripetutamente dall'alcool diluito, si fusero a 90°-91°.

Gr. 0,1412 di sostanza diedero gr. 0,3306 di CO_2 e gr. 0,0794 di H_2O

	Calcolato per $C_{11}H_{12}O_4$	Trovato
C °/₀	63,5	63,8
H °/₀	5,8	6,3

Il modo migliore per ottenere il chetone puro consiste nel preparare dall'olio greggio il semicarbazone o l'ossima, purificarli per cristallizzazione, e scomporli poi con acido solforico diluito. Si ottiene così, dopo una sola cristallizzazione dall'alcool diluito, il chetone già quasi puro e pronto per l'analisi.

Cristallizza in piccoli aghi setacei p. f. 93° solubili negli ordinarî solventi e nell'alcool diluito, insolubili in acqua.

La soluzione alcoolica dà, per agitazione con bisolfito sodico un derivato bisolfitico cristallino che non fonde neppure a 230°.

Gr. 0,2203 di sostanza diedero gr. 0,5106 di CO_2 e gr. 0,1139 di H_2O

	Calcolato per $C_{11}H_{12}O_4$	Trovato
C °/₀	63,50	63,21
H °/₀	5,80	5,78

Preparazione dell'ossima: gr. 5 di chetone greggio sciolti in alcool a 95° vennero addizionati di 3 gr. di cloridrato di idrossilammina, di 14 cc. di una soluzione acquosa concentrata di potassa e posti a ricadere a b. m. per un'ora circa. Versando in acqua precipita abbondantemente un olio che non tarda a solidificare in piccolissimi prismi che, filtrati alla pompa e cristallizzati dall'etere, fondono a 124°.

L'ossima è solubile in acqua a caldo, solubile in alcool, benzolo, etere, poco solubile in etere di petrolio e ligroina.

Gr. 0,1875 di sostanza diedero gr. 0,4074 di CO_2 e gr. 0,0990 di H_2O

	Calcolato per $C_{11}H_{13}O_4N$	Trovato
C °/₀	59,19	59,26
H °/₀	5,82	5,91

Preparazione del semicarbazone: gr. 5 di olio greggio con gr. 7,35 di acetato sodico fuso sciolto in poca acqua e gr. 4,02 di cloridrato di semicarbazide, furono posti a ricadere a b. m. per 4 ore: per diluizione con acqua si separò un olio che cristallizzò ben presto in piccoli aghi solubili in acqua bollente, alcool e cloroformio, poco solubili in etere, benzolo, solfuro di carbonio. Si purifica filtrando alla pompa il prodotto greggio, lavando con etere e cristallizzando da alcool diluito. P. f. 180°.

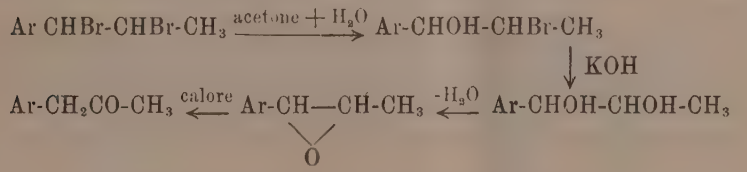
Gr. 0,2060 di sostanza diedero cc. 18,8 di N idrazinico [1] a 16° e 757 mm. di pressione.

	Calcolato per $C_{12}H_{15}O_4N_3$	Trovato
Azoto idrazinico °/₀	10,56	10,73

[1] Rimini, Gazz. 34 (1904), pag. 224.

È così dimostrato che il composto preparato per scomposizione del bibromuro di isomiristicina con metilato sodico e successiva distillazione in corrente di vapore contiene un carbonile chetonico e non aldeidico perchè non reagisce con acido di Piloty per dare un acido idrossamico. Nonostante che, per analogia di preparazione coi chetoni preparati da altri in condizioni identiche non vi potesse essere dubbio che il carbonile fosse in posizione α rispetto al nucleo aromatico, tuttavia non ho creduto superfluo dimostrarlo ossidando il chetone ad acido propionico che identificai dal suo sale di argento.

Per preparare il β-chetone dell'isomiristicina ho seguito il metodo consigliato da Hoering. Come è noto (1) i bibromuri delle combinazioni propeniliche, riscaldati a bagno maria con acetone acquoso, si lasciano sostituire il bromo in posizione α con l'ossidrile per dare degli α-ossi-β-bromoderivati saturi. Questi composti, riscaldati con potassa alcoolica, si trasformano nel glicole corrispondente che perde con grande facilità acqua formando un ossido, che per semplice riscaldamento, o da solo, o con acidi minerali diluiti, o meglio con acido acetico glaciale addizionato con qualche goccia di acido solforico si isomerizza in chetone:



Il bibromuro di isomiristicina ricavato partendo da 40 gr. di questa, insieme a gr. 160 di acetone, 40 gr. di acqua, e 12 gr. di marmo in piccoli pezzi venne riscaldato due ore a b. m. Dopo separazioned ello strato acquoso che teneva in soluzione bromuro di calcio, si proseguì il riscaldamento per altre due ore. Eliminato per distillazione l'acetone, si separò un olio che venne lavato tre volte con acqua e seccato nel vuoto su acido solforico. Rendimento gr. 56. L'α-ossi-β-bromodiidroisomiristicina così ottenuta si presenta sotto forma di un olio densissimo, giallo bruno, d'odore pungente, che irrita gli occhi fino alle lagrime. Non è purificabile in nessun modo perchè non cristallizza nemmeno raffreddato in miscela frigorifera e, per distillazione nel vuoto, si scompone subito dando sostanze resinose. Tuttavia il prodotto greggio analizzato, diede una percentuale di Br sufficientemente corrispondente a quella richiesta dalla formula di ossibromodiidromiristicina.

(1) P. Hoering, Ber. 38, 3477.

Gr. 0,2535 di sostanza diedero (Carius) gr. 0,0962 di Ag ridotto dal bromuro.

Calcolato per $C_{11}H_{13}O_4Br$		Trovato
Br %	27,7	28,1

Gr. 40 di α-ossi-β-bromodiidroisomiristicina vennero sciolti in 50 cc. di alcool e versati in una soluzione di 12 gr. di potassa in 100 cc. di alcool; si produsse subito un precipitato bianco di KBr; tuttavia la reazione venne continuata riscaldando a b. m. per 4 ore. Si versò poi il prodotto della reazione in acqua e si separò così un olio giallo bruno che si estrasse con etere dopo aver neutralizzato con acido acetico. Scacciato l'etere rimasero 31 gr. di un olio denso, giallo rossastro, che non conteneva traccia di bromo. Questo olio sottoposto alla distillazione nel vuoto a 30 mm., comincia a distillare a 190°, e passa quasi tutto da 230° a 240°; la frazione bollente fra questi limiti di temperatura, lasciata a sè, cristallizza in mammelloni che, spremuti fra carta da filtro, fondono a 44°-45°. Ricristallizzati dall'etere petrolico fondono a 54°-55°, e conservano tale punto di fusione cristallizzati ancora una volta dall'acqua bollente. La sostanza, cristallizzata dall'acqua, si presenta in lunghi aghi setacei, solubili in alcool ed etere. All'analisi si ebbero numeri corrispondenti alla formola di ossido o di chetone.

Gr. 0,1422 di sostanza diedero gr. 0,3290 di CO_2 e gr. 0,0712 di H_2O

Calcolato per $C_{11}H_{12}O_4$		Trovato
C %	63,5	63,1
H %	5,8	5,9

Ma, poichè il prodotto combinavasi assai facilmente con bisolfito sodico per dare un derivato cristallino, reagiva pure coll'idrossilammina e la semicarbazide, si trattava senza alcun dubbio del chetone formatosi dall'ossido liquido durante la distillazione a pressione ridotta. Infatti, il prodotto greggio della reazione fra potassa alcoolica e α-ossi-β-bromodiidroisomiristicina, non si combinò col bisolfito nè accennò mai a cristallizzare. Non era dunque possibile purificare l'ossido per cristallizzazione o distillazione frazionata, tuttavia all'analisi ottenni numeri che corrisposero abbastanza bene alla formola attribuita; le differenze riscontrate nelle percentuali si possono facilmente spiegare colla presenza di una certa quantità di glicole $C_6H_2(OCH_3)(O_2CH_2)\,CHOH\,.\,CHOH\,.\,CH_3$ e colle impurità inevitabilmente contenute nel prodotto greggio.

Gr. 0,2146 di sostanza diedero gr. 0,4798 di CO_2 e gr. 0,1306 di H_2O

Calcolato per $C_{11}H_{12}O_4$ (ossido) C % 63,5 H % 5,8
» » $C_{11}H_{14}O_5$ (glicole) C % 58,4 H % 6,2
Trovato C % 61 H % 6,8

Il riscaldamento diretto dell'ossido a pressione ordinaria lo isomerizza solo in piccola parte, mentre il rimanente vien trasformato in prodotti catramosi. Anche l'ebullizione con acido solforico diluito si mostrò poco adatta a compiere la isomerizzazione perchè si forma in tal modo gran quantità di resina. Il metodo più conveniente per ottenere con rendimento buono il chetone è quello di riscaldare l'ossido grezzo, sciolto in acido acetico glaciale, con qualche goccia di acido solforico concentrato, versare il prodotto in acqua, estrarre con etere e dibattere l'olio bruno, che resta come residuo dopo la distillazione dell'etere, con bisolfito sodico: si ottiene così un derivato bisolfitico cristallino che peraltro trattiene molta resina dalla quale si libera con ripetuti lavaggi con etere.

Per scomposizione del composto bisolfitico si ha un olio che non tarda a rapprendersi in massa cristallina che si purifica ulteriormente per cristallizzazione dall'acqua previo trattamento con nero animale. Si ottengono così gli aghi sericei; p. f. 55°.

Gr. 0,1713 di sostanza diedero gr. 0,3974 di CO_2 e gr. 0,0850 di H_2O

	Calcolato per $C_{11}H_{12}O_4$	Trovato
C °/₀	63,5	63,3
H °/₀	5,8	5,6

Semicarbazone: gr. 2 del chetone sciolti in alcool vennero posti a ricadere con 2 gr. di cloridrato di semicarbazide e 4 gr. di acetato sodico fuso sciolto in poca acqua. Dopo 4 ore di riscaldamento versando in acqua il prodotto della reazione si separò un olio che si rapprese ben presto in cristalli che, lavati con poco etere e cristallizzati dal benzolo, fusero a 143°-144°. Solubili in acqua calda, alcool, benzolo, poco solubili in ligroina, insolubili in etere petrolico.

Analisi: gr. 0,1026 diedero cc. 9,4 di N idrazinico a 749 mm. e 16°.

	Calcolato per $C_{12}H_{15}O_4N_3$	Trovato
Azoto idrazinico °/₀	10,56	10,66

Il chetone ripristinato dal semicarbazone aveva un punto di fusione 54°-55°.

Ossima: gr. 3,5 di chetone vennero sciolti in alcool ed addizionati con gr. 2,1 di cloridrato di idrossilammina e con 10 cc. di soluzione acquosa concentrata di KOH. Si lasciò ricadere a b. m. per 3 ore dopodichè si versò in acqua fredda; si formò un leggero intorbidamento che divenne precipitato abbondante neutralizzando con acido solforico diluito. Col riposo il precipitato diviene cristallino (prismi riuniti a ciuffi) e fonde a 100°-104°: cristallizzato dalla ligroina fonde a 111°-112°. Solubile in alcool, acqua bollente ed alcali, pochissimo solubile ia etere di petrolio, discretamente solubile in ligroina bollente, solubile in benzolo.

Gr. 0,1445 di sostanza diedero cc. 8,1 di N a 20° e 755 mm.

	Calcolato per $C_{11}H_{13}O_4N$	Trovato
N °/₀	6,3	6,5

Il metodo di preparazione seguito per questo composto e le notevoli differenze nelle proprietà fisiche che presenta in confronto all'α-chetone dell'isomiristicina non lasciano nessun dubbio trattarsi del β-chetone. Nonostante ho preparato questo chetone, per riduzione della β-nitroisomiristicina e successiva idrolisi dell'ossima (metodo Wallach [1]). La β-nitroisomiristicina fu preparata seguendo le indicazioni di Rimini [2]).

Gr. 0,75 di β-nitroisomiristicina vennero sospesi in 30 cc. di acido acetico glaciale e 6 cc. di acqua e addizionati, operando a freddo, con gr. 1 di zinco in polvere. La miscela si lasciò reagire a temperatura ordinaria fino a scomparsa del colorito giallo, poi versata in acqua e acidificata nettamente con acido solforico diluito, portata all'ebullizione ed estratta con etere. L'etere per evaporazione lasciò un residuo che, dopo cristallizzazione dall'acqua, fuse a 55°. Si trattava dunque del chetone già prima ottenuto rimanendo così completamente dimostrata la posizione del carbonile.

Accennerò ora ad alcuni tentativi fatti per preparare il dimero dell'isomiristicina.

Come è noto la massima parte dei composti propenilici si polimerizzano facilmente per azione degli acidi e del calore.

Così Orndoff, Terraye e Morton [3]) ottengono un dimero dell'anetolo scaldando questo composto a 250°-275° sotto pressione; Tiemann ottiene quello dell'isoeugenolo per azione di cloruro di acetile sull'eugenolo e successiva saponificazione del derivato acetilico [4]). Heiden brevettò [5]) un metodo per preparare i polimeri dell'isoeugenolo basato sul riscaldamento con piccole quantità di mezzi condensanti.

Angeli e Mola [6]) prepararono il diisosafrolo riscaldando in tubi chiusi a 160° per 5 ore volumi eguali di isosafrolo e di alcool saturo di HCl; mentre Tibor Szeki [7]) preparò i dimeri dell'isoapiolo, del metilisoeugenolo e dell'asarone saturando con HCl gassoso una soluzione eterea della sostanza e scaldando poi, in qualche caso, il residuo della distillazione in tubo chiuso.

A questi diversi metodi vanno aggiunti quelli recentemente pubblicati [8]) da Francesconi e Puxeddu che consistono nel sottoporre all'azione della luce o del calore moderato (100°) soluzioni alcooliche di sostanza addizionate con piccola quantità dell'ordinaria soluzione acquosa di HCl.

(1) Wallach Lieb. Ann. 1903-1904.
(2) Gazz. XXXV, I, pag. 400.
(3) C. B. 1898, I, 208.
(4) Ber. 24, 2874.
(5) Patente, 70, 274.
(6) Gazz. 24, II, pag. 127.
(7) Ber. 39 (2422).
(8) Gazz., 39, II, pag. 202.

Tutti questi metodi peraltro non permisero di polimerizzare l'isomiristicina perchè, se in qualche caso (come nel metodo dell'azione chimica della luce) si ottiene la sostanza inalterata, in altri casi si hanno resine.

Riassumerò i tentativi fatti:

a) Riscaldamento in tubo chiuso per 5 ore a 160° (metodo di Angeli e Mola). Il contenuto del tubo è bruno e versato in acqua lascia separare una resina violacea, solubile negli ordinarî solventi, ma non cristallizzabile.

b) Azione dell'HCl su una soluzione di isomiristicina in etere anidro e successivo riscaldamento a 200° in tubo chiuso (metodo di Tibor Szeki); si ottiene una massa solida bruna incristallizzabile. Miglior riuscita non ebbe l'esperienza ripetuta senza il riscaldamento in tubo chiuso.

c) Esposizione alla luce solare per 4 ore di una soluzione di isomiristicina in alcool assoluto addizionata di un po' di HCl densità 1,19 (metodo di Francesconi e Puxeddu): la sostanza rimane inalterata.

d) Riscaldamento per 2 ore a 100° della stessa soluzione. La sostanza non rimane inalterata ma dà, versata in acqua, un olio incolore dal quale non si arriva a separare nulla di definito nè per distillazione nel vuoto, nè per azione del Br a freddo.

Il tentativo ripetuto riscaldando a 150° per 6 ore non diede miglior risultato poichè si ottennero resine brune.

Analogamente ho invano tentato il riscaldamento della isomiristicina con altri mezzi condensanti, quali l'acido solforico, il cloruro d'acetile, l'anidride acetica. Riscaldando per qualche tempo l'isomiristicina sciolta in acido acetico con qualche goccia d'acido solforico, si ottiene con piccolissimo rendimento una sostanza che mostra i caratteri di un polimero della isomiristicina.

30 gr. di isomiristicina si sciolgono in 50 cc. di acido acetico glaciale, si addizionano con sei goccie di acido solforico concentrato e si riscaldano a ricadere per 5-10 minuti. Durante il riscaldamento la soluzione dapprima incolora si colora in giallo, poi in bruno violaceo con bellissima fluorescenza azzurra; col raffreddamento e col riposo si depositano dei cristallini che lavati su filtro con acido acetico fondono a 215°-222°. Sono poco solubili in quasi tutti i solventi, si sciolgono discretamente nel benzolo bollente dal quale cristallizzano in piccoli prismi p. f. 232°-233°. La sostanza fusa mostra una magnifica fluorescenza verde-azzurra. Il rendimento è minimo e non raggiunge il 2 %.

Le determinazioni del peso molecolare diedero risultati poco soddisfacenti per la poca solubilità della sostanza; così non fu possibile una determinazione crioscopica in benzolo, nitrobenzolo, uretano perchè la solubilità a freddo è notevolmente inferiore al 0,5 %.

Una determinazione ebullioscopica in benzolo, per quanto risponda sufficientemente al peso molecolare di un dimero, non può ritenersi sicura per il piccolo innalzamento ottenuto:

Solvente	Sost.	Conc.	Inn	M
12,25	0,1149	0,94	0,070	398

Calcolato per $(C_{11}H_{12}O_3)_2 = 384$.

Non è improbabile che il prodotto ottenuto per azione dell'acido solforico concentrato sull'isomiristicina sciolta in acido acetico glaciale corrisponda al dimero di quest'ultima, e però mi riservo di continuarne lo studio.

Porgo vivissimi ringraziamenti al prof. Enrico Rimini che mi ha indirizzato in queste ricerche, ed al laureando sig. Muzio Fedele che mi ha coadiuvato in alcune delle su riferite esperienze.

Mineralogia. — *Anfiboli di Monte Plebi presso Terranova Pausania* (Sardegna). Nota di Domenico Lovisato, presentata dal Socio G. Struever.

Geologia. — *Contributo allo studio del Cambriano della Sardegna*. Nota dell'ing. dott. M. Taricco, presentata dal Socio C. F. Parona.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisiologia vegetale. — *Su la formazione del glicogeno nella cellula di lievito*. Nota di Diana Bruschi, presentata dal Socio R. Pirotta.

L'unico argomento per sostenere che la formazione del glicogeno nella cellula di lievito sia dovuta ad un enzima sintetico, si ha in una esperienza di Cremer (Ber. chem. Ges., 32, 1899, pag. 2002), il quale, avendo mescolato succo di lievito, spremuto col metodo di Buchner, ad una soluzione di fruttosio, vide formarsi in dodici ore una sostanza che si colorava in bruno con jodio.

Per chiarire la natura enzimatica del processo di formazione del glicogeno, ho fatto alcune esperienze, movendo dal seguente principio:

1. Se la formazione del glicogeno è dovuta ad un enzima, *narcotizzando* il lievito nel momento in cui sta per cominciare, essa dovrebbe aver luogo ugualmente come nel medesimo lievito non narcotizzato, visto che le

condizioni del liquido esterno non cambiano. A queste prove servì una razza pura isolata da un vino di Milazzo, nota per la facilità con cui forma il glicogeno, allevandola in mosto d'uva defecato e filtrato, addizionato di 5 gr. di tartrato ammonico per litro, in ampolle eguali, contenenti ognuna 100 cc. di mosto a 25° C. *Così l'etere come il cloroformio non impediscono la formazione del glicogeno se si applicano gradatamente al lievito in dose tale da non arrestare la fermentazione; la impediscono totalmente quando arrestano la fermentazione.* Questo risultato è ambiguo e si potrebbe spiegare ammettendo che la *glicogensinteàsi* sia della stessa natura della zimasi, o che la formazione del glicogeno dipenda dal processo di fermentazione, anzichè rappresentare una condensazione indipendente dello zucchero assorbito.

2. Ricorsi anche ad *antisettici* in dosi tali che notoriamente bastano a sospendere l'attività vitale senza molto danno degli enzimi, per lo meno di taluni enzimi, e cioè al timolo, alla formalina, al bisolfito di potassio. Il *timolo* però in dose appena sufficiente per arrestare la fermentazione impedisce totalmente la formazione di glicogeno; in quantità minore non impedisce nè l'uno, nè l'altro processo. Egualmente si comporta la *formalina.* Il *bisolfito* invece, in dose crescente da 60-80 mgr. per litro eccita notevolmente la fermentazione e la formazione di glicogeno; in dose crescente da 10 a 30 mgr. per 100 cc., ha una minore azione attivante, ma sempre parallela su ambo i processi; in dose crescente da 20 a 40 mgr. (per 100 cc.) attiva la fermentazione e limita la formazione di glicogeno a poche e piccole goccioline per ogni cellula, che si ridisciolgono più presto che nel controllo; ha quindi un'azione attivante su la glicogenasi e contraria alla sintesi.

3. Ho provato infine un antisettico più blando, che, in dose limitata, agisce come narcotico anche sul lievito (cfr. Pantanelli, Ann. di Bot., II. 1905, pag. 345; IV, 1906, pag. 33): voglio dire l'*alcool etilico.* Aggiungendo un mol. di alcool (per 100 cc.) a lievito a piena fermentazione, ma ancora privo di glicogeno, questo si forma immediatamente in quantità tale da riempire totalmente la cellula, plasma e vacuoli; e se si aumenta gradatamente, per es. di 6 in 6 ore, la dose dell'alcool fino ad arrestare la fermentazione (quindi anche la moltiplicazione), le cellule restano cariche di glicogeno per 10-15 giorni, fino a che muoiono senza discioglierlo. Se invece si aggiunge in una volta una dose di alcool sufficiente per arrestare subito la fermentazione, ciò che porta anche una leggera contrazione delle cellule, il glicogeno compare egualmente più presto che nelle culture di controllo; ma in minutissimi granuli, poi aumenta gradatamente, ma non di più che nel controllo e si ridiscioglie con eguale rapidità.

È dunque escluso che anche in questo modo si riesca a separare l'attività glicogenetica dall'attività vitale: si tratta piuttosto di un'azione nutritiva o stimolante dell'alcool, ed anzi, giacchè l'esperimento lo dimostra, possiamo ritenere che anche in condizioni ordinarie di fermentazione, il gli-

cogeno compaia quando appunto si fa sentire su la cellula di lievito l'azione dell'alcool prodotto dalla fermentazione stessa. *Non è dunque la concentrazione dello zucchero presente ed assorbito, ma la produzione dell'alcool il fattore che determina la formazione del glicogeno nel lievito* (1).

4. Questa osservazione mi ha fatto pensare che la spinta alla condensazione dello zucchero in glicerina potrebbe essere data dall'*azione disidratante* dell'alcool ed ho allora provato, se ricorrendo, anzichè alla semplice narcosi, ad un'azione disidratante (plasmolitica) energica, combinata a narcosi si possa sospendere l'attività vitale del lievito e stabilire nello stesso tempo le condizioni di concentrazione del mestruo cellulare, che verisimilmente sono indispensabili alla condensazione dello zucchero in glicogeno, come per altri enzimi è stato dimostrato (cfr. Pantanelli, Rendic. Accad. Lincei (5), XVII, 1907, II sem., pag. 419; Ber. bot. ges., XXVI, 1908, pag. 494; Pantanelli e Faure, Rendic. Acc. Lincei (5), XIX, 1910, I sem., pag. 489). A questo scopo, a lievito in piena fermentazione in 100 cc. del solito mosto e ancora privo di glicogeno, ho aggiunto $^1/_{10}$ di mol. di mannite, glicerina, saccarosio, cloruro di calcio, basandomi su misure di Pantanelli (Ann. di Bot., IV, 1906, pag. 1), secondo cui, il limite plasmolitico del lievito non arriva quasi mai a 10 *is.* (= 1 mol. (litro) di KNO_3).

Ad una prima serie di culture furono fatte queste aggiunte, ad una seconda serie furono prima aggiunti 3 cc. di etere, e subito dopo le dette sostanze; ad una terza serie $^1/_{10}$ di mol. di alcool e subito dopo le dette sostanze, lasciando per ogni serie i relativi controlli senza narcotico o senza disidratante. La *mannite* ed il *cloruro di calcio* da soli hanno plasmolizzato le cellule, senza impedire del tutto la formazione di glicogeno, che invece non si è formato affatto in presenza di queste sostanze e di etere o di alcool. La *glicerina*, com'era da prevedersi, data la sua permeabilità (Pantanelli, Rendic. Accad. Lincei (5), XV, 1905, I sem., pag. 719; Swellengrebel, Centr. f. Bakter. (2), XIV, 1905, pag. 374), non ha plasmolizzato alcuna cellula nè arrestato la fermentazione ed ha favorito grandemente la formazione di glicogeno; ma lo stesso è accaduto dopo l'aggiunta di etere o di alcool. Il *saccarosio* non ha prodotto plasmolisi nè arrestata la fermentazione: ha favorito la formazione di glicogeno e ne ha impedito il discioglimento, così che dopo qualche settimana le cellule ancora ne rigurgitavano, sebbene la fermentazione fosse cessata da un pezzo. In presenza di etere il

(1) Infatti, nel lievito di birra o di distilleria, coltivato in substrato liquido, si forma glicogeno secondo Cremer (Zeitschr. f. Biol., XXXI, 1894, pag. 183) e Henneberg (Zeitschr. f. Spiritusind., 1902, n. 35), solamente in presenza di zucchero fermentescibile, non di lattosio, arabinosio, sorbosio, glicerina, mannite, amido, destrina, asparagina, peptone. I dati di Laurent (Ann. Inst. Pasteur, II, 1888, pag. 113; Bull. Soc. Belge de Microsc., XIV, 1890, pag. 29), che avrebbe ottenuto formazione di glicogeno anche in presenza di mannite, glicerina, lattosio, asparagina, peptone, glutamina, albumina, sono stati contradetti da Cremer ed Henneberg.

saccarosio ha favorito la produzione del glicogeno, però meno che nelle cellule non eterizzate, e ne ha egualmente impedito la digestione. Invece in presenza di alcool si è avuto dapprima plasmolisi ed arresto della fermentazione; poi, scomparsa lentamente la plasmolisi, le cellule hanno ripreso a gemmare, a fermentare e in seguito è ricomparso il glicogeno in gran quantità.

Ho ripetuto la prova con la glicerina raddoppiando la dose ($^2/_{10}$ di mol. per 100 cc.) ed ho ottenuto una transitoria plasmolisi tanto senza come in presenza di etere e dopo aggiunta di alcool: scomparsa la plasmolisi, le cellule hanno ripreso a sviluppare ed a fermentare e poco dopo è comparso il glicogeno.

Dunque, anche *combinando l'azione di un narcotico o di una sostanza che favorisce la formazione di glicogeno*, quale è l'alcool, *con l'azione di sostanze disidratanti*, le quali dovrebbero favorire i processi sintetici, di condensazione, *non si riesce a separare la produzione del glicogeno dalla piena attività vitale. Basta per molte cellule lo stato plasmolitico*, che non rappresenta certo la sospensione dell'attività vitale, *per impedire la formazione del glicogeno; scomparsa la plasmolisi, la facoltà di formare il glicogeno ricompare*.

5. Un altro mezzo per favorire le condensazioni enzimatiche consiste, secondo osservazioni di Pantanelli (Rendic. Acc. Lincei (5), XVI, 1906, pag. 419; XIX, 1910, pag. 489; Ann. di Bot., V, 1907, pag. 355; Ber. bot. Ges., XXVI, 1908, pag. 494), nel *neutralizzare l'acidità*, la quale si mostra invece favorevole alle idrolisi enzimatiche. Nel nostro caso questo mezzo presentava probabilità di riuscita, perchè Kayser e Boulanger (Chem. Centr., 1898, II, pag. 440) hanno trovato che il lievito forma tanto più glicogeno quanto minore è l'acidità dell'ambiente e che l'acido tartarico — il quale si trovava anche nel mosto d'uva da me adoperato — ha la massima azione inibente su la formazione del glicogeno. Anche Will (Centr. f. Bakter. (2), XVII, 1907, pag. 696) ha osservato più glicogeno in alcune razze di lievito coltivate in acqua di lievito *neutra* che in mosto d'orzo acido. Si sa poi che il glicogeno è digerito più presto nei liquidi molto acidi (Heinze, Centr. f. Bakter. (2), XII, 1904, pag. 360).

Quando il lievito era entrato in piena fermentazione e stava per formare il glicogeno, neutralizzavo con soda $^1/_5$ norm., con o senza aggiunta di etere o di alcool nelle proporzioni su dette. Nelle culture non narcotizzate si osserva allora la formazione immediata di un'enorme quantità di glicogeno, che si ridiscioglie dopo 3-4 giorni. Nelle culture narcotizzate con etere si forma più glicogeno che nei controlli rimasti acidi, purchè la narcosi non sia spinta fino all'arresto della fermentazione, nel qual caso il glicogeno non si forma affatto; inoltre la quantità di glicogeno è minore che nelle culture neutralizzate, ma non eterizzate. Aggiungendo gradatamente alcool alle culture

neutralizzate, non si forma glicogeno, quando neppure è arrestata completamente la fermentazione. Quindi, *anche in ambiente neutro, non si riesce a provocare la formazione di glicogeno in cellule di lievito narcotizzate* (quando la fermentazione è avanzata).

6. Ho tentato allora di procedere per un'altra via: culture in piena fermentazione furono neutralizzate e addizionate di tanto alcool da rallentare fortemente la fermentazione; non si formò glicogeno e quando la fermentazione fu cessata (dopo circa 12-13 giorni) fu sostituito il liquido con mosto fresco, addizionato di 2 cc. di etere (per 100 cc.). *La fermentazione non riprese, le cellule non si moltiplicarono, rimasero però vive e dopo tre giorni comparvero granuli di glicogeno in varie cellule.* Avevo dunque finalmente realizzato una condizione sperimentale, in cui, dopo aver sospeso con la narcosi l'attività fermentativa e moltiplicativa delle cellule di lievito, si poteva determinare la formazione del glicogeno. Probabilmente nel primo periodo avevo, con l'aggiunta di alcool, impedito l'attivazione dello zimogeno (*prosinteàsi*), già formato nelle cellule, processo che si svolse poi lentamente (tre giorni) quando ebbi sostituito il mosto fresco acido. È noto, da ricerche di Pantanelli e mie (Ann. di Bot., VIII, 1910, pag. 133), che la trasformazione degli zimogeni in enzimi attivi è possibile al di fuori dell'attività vitale, mentre la formazione degli zimogeni è opera del protoplasma vivo (proinvertàsi, proamilàsi).

7. Anche un'altra via fu battuta con leggero successo: ad una cultura in mosto normale, in cui il glicogeno si sia formato e ridisciolto, così da far ritenere che le cellule non contengano più prosinteàsi, tolgo il liquido e lo sostituisco col liquido di un'altra cultura, in cui, con l'aggiunta di molto saccarosio ($^1/_{10}$ mol = 34,2 %) e di alcool ($^1/_{10}$ mol = 4,6 %), non solo ho provocato un'abbondante formazione di glicogeno, ma ne ho impedito il discioglimento; questo liquido dovrebbe quindi avere una composizione tale da favorire la produzione del glicogeno. Subito dopo la sostituzione, aggiungo 1 cc. di etere. *Dopo circa 24 ore compare il glicogeno in varie cellule ed aumenta nei giorni successivi, sebbene la fermentazione e la moltiplicazione non riprendano e le cellule si mostrino piuttosto sofferenti.* In questo caso, pare che anche la prosinteàsi si formi in cellule narcotizzate. È un resultato che va d'accordo con l'esperienza di Cremer, in cui il fruttosio, aggiunto al succo spremuto dal lievito e già privo di glicogeno, determinò nuovamente la formazione di questa sostanza.

8. I resultati positivi di questa e della precedente serie di esperienze mi hanno fatto pensare che, per realizzare la formazione di glicogeno in cellule narcotizzate o versanti in necrobiosi per azione di un antisettico blando, abbia molta importanza la scelta del momento in cui si sottopone il lievito al trattamento, sopra tutto in rapporto con lo *stadio di fermentazione*. Per dilucidare questo punto, ho tolto il liquido fermentato ad un certo numero

di culture già prive di glicogeno e l'ho sostituito con mosto fresco, esattamente *neutralizzato*, poi ogni due ore ho narcotizzato con *etere* una di esse, in dose tale da arrestare via via l'ulteriore gemmazione e la fermentazione. Accade allora che nelle cellule già esistenti si forma glicogeno, finchè la fermentazione non è ancora visibile, mentre non si forma ancora nelle cellule non eterizzate e neppure nelle nuove cellule eterizzate. Quando invece la fermentazione è appena cominciata, allora, in presenza di etere, si forma glicogeno in tutte le cellule vecchie e nuove, sebbene in piccola quantità, mentre nei controlli non è ancora comparso. Infine, quando la fermentazione è in pieno vigore, la narcosi impedisce la produzione di glicogeno parallelamente all'arresto della fermentazione. Resultati analoghi ho avuto adoperando un antisettico, il bisolfito di potassio (200 mgr. per litro) al posto del narcotico.

Questi fatti mostrano che la spinta alla condensazione del glicogeno, cioè *la formazione del proenzima sintetico si ha nel plasma subito dopo l'assorbimento dello zucchero*, ma soltanto in plasma che abbia già passato una fermentazione o abbia appena cominciato a fermentare la sinteàsi *effettua* la condensazione del glicogeno anche in cellule narcotizzate. Invece, *in cellule già in piena fermentazione, la narcosi impedisce anche l'azione della sinteàsi.* Questa apparente contraddizione dimostra che il glicogeno si forma per condensazione di qualche *prodotto intermedio della fermentazione*, probabilmente da un prodotto delle prime fasi del processo, ossia *la formazione del glicogeno rappresenta una reversione parziale di un processo singolo nella catena dei processi di digestione dello zucchero*, che noi percepiamo nell'insieme con fermentazione alcoolica. Si potrebbe cioè paragonare la sintesi del glicogeno alla formazione dell'asparagina dagli aminoacidi e da ammoniaca durante la digestione delle albumine nelle piante verdi: un processo laterale regressivo di sintesi, che si innesta sopra *una* delle fasi principali del processo principale di digestione.

Ciò spiega perchè solo in un dato momento della fermentazione sia possibile separare questa sinteàsi enzimatica dalla piena attività vitale, e perchè l'aggiunta di alcool (che per l'azione di massa ostacola le ultime fasi del processo fermentativo) e la plasmolisi con sostanze inerti (mannite, cloruro di calcio) favoriscono o provocano la formazione di glicogeno (1). Data la sua natura di processo laterale, si comprende perchè

1) la formazione del glicogeno non sia di alcuna utilità per il lievito in condizioni di normale fermentazione, come hanno riconosciuto Will (Allgem. Brauer u. Hopfenztg., 1892, pag. 1088) Lindner (Mikrosk. Betriebskontr., 1898, pag. 254), Meissner (Centr. f. Bakter. (2), IV, 1900, pag. 517; Wortmann (Landw. Jahrb., XXII, 1892, pag. 557); Henneberg (Zeitschr.

(1) La neutralizzazione del liquido ambiente può invece agire favorevolmente perchè inibisce il lavorio della glicogenàsi (enzima idrolitico).

f. Spiritusind., 25, 1902, n. 35), Heinze (Centr. f. Bakter. (2); XII 1904-1905, pag. 60), mentre il glicogeno può, tutt'al più, rappresentare una sostanza di riserva per lievito che venga artificialmente messo a digiunare;

2) perchè il glicogeno scompare dal lievito quando lo zucchero non è ancora tutto fermentato (Jodlbauer, Zeitschr. f. Rübenzuckerind., 1888; Gontscharuk, Centr. f. Bakter (2), VI, 1900, pag. 546; Meissner; Wortmann, Ber. 20. Weinbaukongress, Mainz, 1902, pag. 31; Henneberg, Zeitschr. f. Spiritusind., 33, 1910, pag. 242; Heinze);

3) perchè il glicogeno si formi in maggior quantità nel lievito molto aereato (Henneberg), dove i prodotti di digestione dello zucchero sono utilizzati meglio per la costruzione di materiali cellulari diversi;

4) infine, perchè il glicogeno si forma, a preferenza in presenza di zuccheri fermentiscibili, mentre non è del tutto impossibile la sua origine anche da materiali non fermentiscibili, ma che possono comparire durante la digestione degli zuccheri, come la glicerina, l'acido lattico, l'acido succinico (Laurent).

Applicando anzi i nostri procedimenti di narcosi, plasmolisi ecc., si potrebbe passare in rassegna una gran quantità di composti organici e vedere quali di essi cadano sotto l'azione della glicogensinteàsi: si arriverebbe così a stabilire, da una parte, quale sia il prodotto intermedio della fermentazione, da cui il glicogeno si suole formare nel lievito; dall'altra parte, si porrebbe appunto la mano su almeno uno di quei prodotti intermedii della fermentazione alcoolica, la cui identificazione affatica da tanto tempo i ricercatori.

Agronomia. — *Siderazione o Biocoltura?* Nota del professore C. Lumia, presentata dal Socio R. Pirotta.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Segretario Millosevich, a nome dei Soci Ciamician, relatore, e Nasini, legge una Relazione, colla quale si propone la inserzione negli Atti accademici della Memoria del prof. G. Bruni, avente per titolo: *Ricerche teoriche e sperimentali sulle soluzioni solide.*

Le conclusioni della Commissione esaminatrice, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrispondente Viola legge la seguente Commemorazione del Socio nazionale prof. Giorgio Spezia.

Quando, pochi mesi fa, io vidi l'uomo, di cui oggi l'Accademia commemora la perdita, egli mi sembrava così forte, florido e giovane di ispirito, che mi figuravo di vederlo ancora molti anni donato ai suoi studî e ai suoi apparecchi; rimasi scosso e attonito davanti a questa incognita della sorte, quando il giorno 10 novembre 1911 mi fu telegrafato la sua morte improvvisa, perchè la leggera indisposizione, da cui egli fu colto due giorni prima, non lasciava presagire la catastrofe imminente. Ed io credo che tutti, conoscitori dello Spezia, amici, colleghi, discepoli, siano stati dolorosamente impressionati di questa subitanea sparizione, mentre un mese prima apparivano ancora i risultati della sua attività scientifica, si seguiva l'andamento dei suoi lavori sperimentali, e si era in aspettazione per la fine di una sua esperienza. Perchè lo Spezia fu un grande sperimentatore, a differenza di molti eminenti mineralogisti, sempre fedele al principio, che egli spesso ripeteva con Leonardo da Vinci, e che dava l'impronta del suo carattere, essere superfluo una discussione o una teoria, quando una sola esperienza può risolvere un dubbio.

Giorgio Spezia nacque l'8 giugno 1842 in Piedimulera in provincia di Novara da genitori e progenitori dediti alla coltivazione delle miniere aurifere di Pestarena in Vall'Anzasca, ed ebbe così coi natali l'amore per gli studî mineralogici, in cui lavorò, si perfezionò sempre e divenne grande.

Studiò e finì gli studî universitarî in Pavia, e distintosi nella battaglia del Volturno, ove si arruolò con la spedizione Cosenz, continuò e finì gli studî di ingegneria al Valentino con una tesi di laurea, che ha per titolo: *Sulla ventilazione delle miniere*, uscita nel 1867.

Ebbe per maestri quelli che tenevano allora alto in Piemonte la scienza mineralogica, il Gastaldi, il Sella, lo Strüver, e si perfezionò ancora in Germania nelle Università di Gottinga e di Berlino, ma sovratutto con la guida del Wöhler.

Ritornato in patria, fu dapprima assistente di mineralogia del Gastaldi, e indi, pochi anni dopo, compiuto il trasporto del museo mineralogico nella attuale sede, dove dimostrò coltura, costanza e amore per le collezioni, succedette ai mineralogisti piemontesi nella cattedra di quella Università, dapprima come incaricato, e definitivamente nel 1878, assumendo inoltre la direzione del museo.

La scelta dello Spezia a direttore del museo mineralogico, che oggi è fra i più belli d'Europa, fu effettivamente felice; fu uno di quei pochi casi, in cui un giovane modesto, intelligente, di animo forte e di carattere aperto e leale, prometteva più di quanto dimostrassero le sue semplici pubblicazioni; esempio che ancora oggi dovrebbesi tenere in seria considerazione in varî concorsi ed in varie offerte di cattedre universitarie; ed in effetto la carriera scientifica dello Spezia fu una delle più brillanti, come il Sella aveva presentito, tutta dovuta alla sua costante operosità ed al suo ingegno.

La sua attività scientifica formata di esperienze proprie e di proprî concetti, si iniziò nel 1871 con lo studio sugli avvallamenti di sponde avvenuti lungo le rive del Lago Maggiore, e si chiuse, singolare coincidenza, con lo studio intorno all'avvallamento delle sponde dei laghi, basato su scandagli nei luoghi franati. Egli pubblicò circa quaranta Memorie scientifiche, in generale esili di mole, ma frutto di lunghe esperienze; talune di più anni di indagini, e tutte recanti un'impronta personale.

Per sollevarsi fino al giusto valore dello scienziato, per impadronirsi, direi, dell'ideale che sempre lo guidava nella sua vita di lavoratore, è mestieri aggruppare i suoi lavori in due distinte categorie, benchè anch'esse abbiano qualcosa di singolarmente comune, nell'una delle quali si devono comprendere lavori di osservazioni mineralogiche, petrografiche e di geologia dinamica, nell'altra lavori propriamente sperimentali, che riguardano non solo la mineralogenesi, ma assicurano eziandio le basi di una parte importante della geologia chimica. Egli fu infatti non solamente mineralogista, ma anche geologo e petrografo nel vero senso; perchè per lui la geologia dovrebbe progredire con l'esperienza, come insegnarono il Bischof, il Bunsen, il Daubrée e pochi altri.

Le sue prime esperienze furono istituite nell'intento di indagare le cause del colore dello zircone, lavoro pubblicato nel 1876; quindi si estesero alla melanoflogite della Sicilia, alla plasticità dell'itacolumite, alla formazione dell'anidrite, alla fusibilità dei minerali, all'origine dello zolfo nei giacimenti siciliani. Ma le esperienze che più lo distinsero, e resero noto presso

ogni nazione il nome di Spezia, hanno per oggetto l'influenza della temperatura nella solubilità e nella genesi dei minerali, esperienze che egli iniziò intorno al 1886 e proseguì senza interruzione fino alla sua morte.

È noto che i geologi e i petrografi, per la maggior parte, attribuirono come attribuiscono ancora molta importanza al fattore pressione nella genesi e nella rigenerazione dei minerali costituenti le roccie.

In appoggio di questo modo di vedere sorse il grande mineralogista Sartorius von Waltershausen, il quale asseriva essere la cristallizzazione dell'apofillite sciolta a 180° C. di temperatura in un tubo chiuso, un fenomeno dovuto unicamente all'azione, che può produrre la pressione di 12 atmosfere; e nonostante le esperienze di Bunsen e di Daubrée quelle idee continuarono a conservarsi se non a rafforzarsi in riguardo di altri fenomeni dinamometamorfici non controllati dall'esperienza, e non ostante le esperienze dello Spring sulle reazioni chimiche sotto forti pressioni, le quali in ultima analisi sono avverse alle dette idee.

Da questo postulato geologico, che ha dominato per molto tempo nella vecchia geologia e si è infiltrato nella nuova, ha origine la campagna indefessa e condotta con tenacità di propositi dallo Spezia, il solo che rimase in campo contro una falange di teorici, e che vinse, avendo netta la immagine di quanto l'esperienza avanza sulla teoria.

Egli comprese che nuove esperienze a nulla varrebbero o a poca utilità condurrebbero, ove innanzi tutto non si eliminassero i dubbî, che lasciarono dietro di loro i risultali sperimentali di precedenti osservatori, e che radicarono nei geologi una serie di equivoci, divenuti principî fondamentali. Onde iniziò le sue esperienze, ripetendo quelle di altri nelle stesse condizioni e in condizioni diverse.

Nel 1886 intraprese l'esperienza sulla formazione dell'anidrite, dimostrando che essa non è possibile nemmeno alla pressione di 500 atmosfere equivalente ad un'altezza idrostatica di circa 5000 metri, confutando così l'asserzione del Bischof. Con esperienze analoghe lo Spezia dimostrò che nella decomposizione del vetro nell'acqua riscaldata ad alta pressione, il fattore causale che entra in vigore, non è la pressione, ma l'elevata temperatura che ne è la conseguenza.

I conoscitori profondi degli studî e delle esperienze dello Spezia, che seguirono passo passo il cammino da lui percorso nel campo scientifico, possono facilmente sintetizzare il valore del nostro caro estinto con brevi parole, poichè un grande naturalista e sperimentatore, quale fu lo Spezia, non ha bisogno che si rilevi questo o quel pregio in questo o quel lavoro eminente.

Ma chi si assume il còmpito di imprimere nella mente altrui tutta la bellezza dell'edificio da lui costruito in quasi 40 anni di operosità, è obbligato a trattare più diffusamente, non dico per enumerarne i varî lavori e per tesserne gli elogi, chè mi sembrerebbe codesto ufficio, semplice sì, ma anche

poco gradito e poco degno, e non rispondente al tributo che lo Spezia ha portato in un campo nuovo; conviene soffermarvisi alquanto, specialmente poi in riguardo di tutti coloro, che non poterono seguire la corrente scientifica da lui vivificata, eppure oggi sentono il vuoto che la sua morte ha lasciato. La personalità spiccata dell'estinto esige anzi che si parli di alcune esperienze con minuti particolari, perchè è propriamente nei particolari, nell'esattezza e nella intima connessione fra il fine e i mezzi, che rifulge il carattere del nostro compianto mineralogista.

È noto che lo Spring ottenne il solfuro di rame sottoponendo ad alta pressione una miscela di solfo e rame; e così ancora il bijoduro di mercurio da una miscela di joduro potassico e bicloruro di mercurio; ma è altresì noto che questi risultati dello Spring non poterono confortare i sostenitori della teoria che la pressione statica funge come fattore importante nelle reazioni chimiche; ma è in ogni modo merito dello Spezia, avere dimostrato non essere possibili le dette reazioni alla temperatura di — 13° C, qualunque pressione d'altronde vi si impieghi, purchè la pressione non provochi sorgenti di calore, come una pressione dinamica.

In seguito l'intento dello Spezia era di dimostrare che la pressione ha effetto insignificante nei processi chimici in confronto di quanto invece ha la temperatura; e fece perciò reagire una soluzione di silicato sodico sullo zolfo, a due distinte pressioni, dapprima a 100 atmosfere, indi a 1600, quella alla temperatura di 300° C., questa alla temperatura ordinaria. Nella prima esperienza lo Spezia ottenne cristalli di quarzo e solfuro sodico dopo sole 43 ore, nella seconda egli non ottenne alcuna reazione nemmeno dopo 6 mesi.

A misura che lo Spezia ideava nuovi apparecchi e le esperienze gli insegnavano nuove modificazioni da apportarsi agli elementi determinanti lo stato di un corpo, i risultati divenivano più precisi ed inconfutabili; e perciò vediamo nei lavori dello Spezia ripetersi numerose e difficili esperienze sulla cristallizzazione del quarzo, che lo tennero occupato in questi ultimi anni.

La modificazione della silice amorfa in silice cristallizzata avviene a temperatura elevata e in varie forme. Una soluzione di silicato sodico reagisce sull'opale alla temperatura di circa 300° e alla pressione di 100 atmosfere producendo quarzo; la stessa modificazione non si è verificata alla temperatura ordinaria e a qualsiasi pressione nemmeno a 6000 atmosfere, comechè il contatto sia durato 8 anni.

Allo Spezia premeva ancora di eliminare una falsa interpretazione data alle esperienze di Pfaff, il quale ammetteva d'aver dimostrato che una parte di quarzo si scioglie in 4700 parti di acqua nel termine di 4 giorni, quando la pressione fosse di 290 atmosfere. Ebbene lo Spezia, rilevando alcuni errori incorsi nelle precedenti misure, dimostrò che il quarzo non si scioglie nell'acqua a temperatura ordinaria nemmeno sotto la pressione di 1750 atmosfere, ma invece vi è solubile a 100° e alla pressione ordinaria.

E proseguì inoltre le esperienze sulla solubilità del quarzo, variando opportunamente temperatura e pressione, fino a riuscire nell'intento, dimostrando che un accrescimento della pressione, anche notevole, non modifica affatto il grado di solubilità del quarzo nell'acqua. Con analoghe esperienze egli dimostrò che l'accrescimento del quarzo è massimo nella direzione del suo asse ternario, e minimo nella direzione normale ad esso.

Le esperienze sulla solubilità e cristallizzazione del quarzo continuarono senza posa; e chi oggi ancora visita il Museo di Torino, ha agio di vedere colà gli apparecchi ideati dallo Spezia, ove sono rinchiusi frammenti di quarzo in via di accrescimento, i quali dovevano essere levati soltanto fra mesi e mesi. Tutti ricordano i bellissimi cristalli di quarzo, limpidissimi, che lo Spezia portò seco a Roma nell'epoca del congresso internazionale di chimica applicata; quei prodotti artificiali assomiglianti ai quarzi del Delfinato con intreccio di fili d'oro per dimostrarne la provenienza artificiale, riscossero gli applausi e l'ammirazione di tutti gli intervenuti.

Non si deve immaginare che i cristalli di quarzo ottenuti dallo Spezia nel corso delle sue esperienze, siano un prodotto accidentale, presentatosi durante le indagini aventi per primo fine la legge che governa la solubilità del quarzo. La sua genesi, la formazione di bei cristalli, come si presentano in natura, dà propriamente la prova di detta legge, ricercata con assidua cura.

Infatti il problema che tormentava lo Spezia in questi ultimi anni, era quello di seguire la traccia di questa prova, che la pressione non altera la solubilità del quarzo e di altri minerali, ma che solo il grado di temperatura è fattore indispensabile in tale processo.

A quest'intento egli costruì un apparecchio, il quale doveva dimostrare insieme l'una e l'altra parte del problema; e con esso ottenne in un regime la soluzione, nell'altro l'accrescimento di cristalli di quarzo in soluzione di silicato sodico, come egli aveva preveduto all'inizio dell'esperienza.

Le due fasi, solida e liquida, venivano sottoposte alla stessa pressione, ma a due diverse temperature; superiormente a temperatura più elevata, dove i frammenti si scioglievano, inferiormente a temperatura più bassa, dove la soluzione più densa poteva raccogliersi e dar luogo all'accrescimento dei cristalli di quarzo, i quali rappresentavano così il risultato finale di un processo continuo.

Oggi la chimica-fisica ha fatto sparire molti equivoci, avendo fissato bene i punti cardinali circa i luoghi di trasformazione, che separano le regioni stabili dei composti e degli stati di questi composti, e circa il concetto di soluzione; sicchè vi sono soluzioni liquide, come vi sono soluzioni solide a diverse pressioni e temperature, e le leggi che governano le une, valgono anche per le altre. Lo Spezia, con i risultati inconfutabili sopra oggetti poco solubili, offre un ricco contingente in varî campi attigui della

scienza; egli fissa dati importanti nella genesi dei minerali, consolida un punto di appoggio nella geologia chimica eliminando vecchi e falsi principî, e porta aiuto alla chimica fisica, aiuto che ingrandisce pensando ai sacrifici costati al nostro caro.

Con commozione si seguì l'attività tenace dello Spezia nel campo geologico e petrografico, ovunque sorgevano modi di vedere contrarî a quelli che potevano essere provati da misure dirette. Così possiamo ricordare la formazione della Wollastonite, che secondo alcuni dovrebbe essere possibile con l'intervento di una forte pressione fra calcare e silice in intimo contatto fra di loro, perchè il volume molecolare della Wollastonite è minore della somma dei volumi molecolari dei suoi componenti. Ma lo Spezia dimostrò in due modi che questa reazione non è possibile, e che non è il caso di invocare la teoria dei volumi molecolari, quando altre condizioni, per l'effettuarsi della reazione, non sono soddisfatte. Egli impiegò 6000 atmosfere per comprimere quarzo contro calcare senza ottenere la Wollastonite; e dimostrò che nelle roccie delle gallerie del Frejus e del Sempione, ove la pressione può valutarsi a 1000 atmosfere, la Wollastonite non esiste nel contatto fra calcari e quarziti, benchè altri l'abbiano osservata in analoghe contingenze. Lo Spezia avrà così la riconoscenza dei geologi, tutti, che si occupano di giaciture minerarie, per avere chiaramente indicato essere la diminuzione della temperatura, non della pressione, la causa del riempimento di litoclasi quarzifere; e dei petrografi ancora, che parlando di metamorfosi dinamica dei minerali costituenti le roccie, ricorderanno sempre i lavori sperimentali dello Spezia, e si troveranno nella necessità di ripetere, seguendo la scuola di lui, una esperienza innanzi che una qualsiasi teoria o discussione sorga sopra un fatto osservato.

I lavori ricordati dello Spezia servono a ridarci il carattere dell'insigne mineralogista, a consacrare il nome di lui; ma giammai a far supporre che lo Spezia si limitasse esclusivamente alla scienza da lui professata, perchè parecchie altre pubblicazioni dimostrano il suo ingegno versatile, la sua vasta coltura.

Come critico fu sempre ascoltato, sia che la sua autorevole voce si elevasse a favore dell'insegnamento superiore, sia che egli scrivesse in difesa della dignità nazionale, come quando esortava gli italiani a non sottoscrivere in favore di un osservatorio vulcanologico internazionale da istituirsi in Napoli.

L'Accademia dei Lincei, che lo ebbe Corrispondente fino al 1901, e quindi Socio nazionale, ha voluto tributargli due volte onore e riconoscenza in merito ai suoi lavori pazienti e importantissimi. Ed essa, così facendo, non premiava le sue modeste pubblicazioni, ma il frutto del suo lavoro di lunghi anni.

La prima volta l'Accademia proponeva lo Spezia al premio reale per la mineralogia in vista di un suo pregiato lavoro sull'origine dello zolfo nei

giacimenti siciliani, che veniva pubblicato in un'epoca, in cui sembrava definitivamente risolto il problema geologico con l'ipotesi della riduzione dei gessi. Lo Spezia rimise in vigore l'antica ipotesi basata sul vulcanismo, già avanzata dal Humboldt nel 1824 per altri giacimenti solfiferi, ipotesi che questa volta è sostenuta dalla paragenesi dei minerali, specialmente solfo, celestina e silice, e controllata da esperienze di laboratorio.

La seconda volta lo Spezia ebbe il premio reale in merito dei suoi lavori, non del tutto ultimati, ma esposti chiaramente in brevissime Note, sulla solubilità e genesi dei minerali, nell'intento di dimostrare che la curva di essa sale con la temperatura. L'Accademia ha dovuto riconoscere la costanza dello scienziato nel raggiungere il fine prefissosi, malgrado polemiche o tacite o esposte, che si sollevarono contro di lui. L'anno dopo lo elesse Socio nazionale.

Giunto al fine del mio dire, col vivo desiderio di mettere in vera luce l'uomo di scienza, sdegnoso di ogni vanità che passa, e solo appassionato per le conquiste scientifiche che rimangono, un'angoscia mi assale, se le mie poche e disadorne parole possano raffigurare la grandezza dell'uomo, che molto taceva, moltissimo operava e con commozione esponeva, ma sempre freddamente, i risultati delle sue esperienze. L'invito a me fatto dal nostro illustre Presidente, mi ha molto spronato a vincere questa angoscia, e nel ringraziarlo della sua benevolenza verso di me, mi conforta il pensiero, che se le mie parole non aggiungono gloria all'amato estinto, possano almeno giovare ai più, che ricorderanno sempre i nostri maggiori, i quali si sono resi utili alla scienza nonchè alla patria.

Ed io sento in questa occasione il bisogno di ricordare ancora che gli uomini di scienza resisi illustri con lavoro faticoso e indefesso, amarono la patria e la famiglia e furono sempre pronti ad ogni evento per l'utilità altrui, come se il dovere per le ricerche scientifiche, con lavori austeri nel conseguire il vero, richiamasse con forza un dovere più elevato quale è quello di figlio, sposo, padre e cittadino, ed ambidue si sorreggessero per il conseguimento del bene comune.

Lo Spezia fu di carattere franco e leale, padre affettuoso, insegnante e maestro scrupoloso, cittadino pronto in più incontri per la cosa pubblica, dove si adoperò spesso con saggezza e utilmente.

E quanto lo Spezia fu illustre nella scienza, altrettanto spiegò un amore tenerissimo per l'alpinismo, e fu come il Sella uno dei più gagliardi soci del Club alpino italiano, che così altamente contribuisce all'educazione morale e fisica della gioventù. Per lui l'Ossola non aveva confronti per bellezze e ricchezze alpine, ed era conoscitore profondo non delle Alpi soltanto. Chi parlerà con più competenza di me, delle lotte alpine vinte dallo Spezia, ricorderà con soddisfazione che il famoso alpinista del Monte Rosa fu illustre nella mineralogia, dove vinse altrettante lotte, forse non meno difficili.

Il Presidente dà il triste annunzio della perdita fatta dall'Accademia nella persona del Socio straniero prof. G. Dalton Hooker, Direttore dell'Orto botanico di Kew, mancato ai vivi il 10 dicembre 1911, nell'età di 92 anni. Apparteneva all'Accademia, per la Botanica, sino dal 2 luglio 1875, ed era il più anziano dei Soci stranieri. A 23 anni prese parte alla spedizione di F. C. Ross al polo antartico, e ne riportò la descrizione di 3 mila specie di piante. Esplorò, per studiarne la flora, il Tibet, l'Imalaia, l'India, il Marocco, l'Atlante, il Colorado, la California.

Il Presidente Blaserna comunica che, conosciuta la nomina del Corrispondente Cagni a Contrammiraglio, si affrettò ad inviargli, anche a nome dell'Accademia, felicitazioni ed auguri, e che ne ebbe la seguente risposta:

Illustre professore,

La ringrazio per le sue gentili felicitazioni e la prego di aggradire col sincero augurio di un felicissimo nuovo anno i miei più deferenti saluti.

Umberto Cagni.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Millosevich dà comunicazione degli elenchi dei concorrenti ai premi scaduti col 31 dicembre 1911.

Elenco dei lavori presentati per concorrere al premio di S. M. il Re per la *Chimica*.

(Premio L. 10,000. — Scadenza 31 dicembre 1911).

Barbieri Nicola Alberto. 1) « Composizione chimica della Retina » (ms.). — 2) « Riassunto sulla composizione chimica della Bile » (ms.). — 3) « Sulla composizione chimica del rosso d'ovo o sulla non esistenza delle lecitine libere o combinate » (ms.).

1. Bruni Giuseppe. 1) « Sul riconoscimento dei composti racemici » (st.). — 2) « Soluzioni solide e miscele isomorfe fra composti a catena aperta, saturi e non saturi. Note 1ª e 2ª (con F. Gorni) » (st.). — 3) « Sui fenomeni di equilibrio fisico nelle miscele di sostanze isomorfe. Nota 2ª (con F. Gorni) » (st.). — 4) « Soluzioni solide e miscele isomorfe » (st.). — 5) « Sulle soluzioni solide nelle miscele di tre sostanze. Nota 1ª » (st.). — 6) « Sulle soluzioni solide nelle miscele di tre sostanze. Nota 2ª (con F. Gorni) » (st.). — 7) « Sulle soluzioni solide » (st.). — 8) « Sugli equilibrii eterogenei fra cristalli misti di idrati salini isomorfi (con W. Meyerboffer) »

(st.). — 9) « Sulla formazione dei cristalli misti per sublimazione (con M. Padoa) » (st.). — 10) « Sulla distinzione fra polimorfismo ed isomeria chimica » (st.). — 11) « Ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo (con M. Padoa) » (st.). — 12) « Ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo (con L. Mascarelli) » (st.). — 13) « Sulle relazioni fra le proprietà dei varî corpi come solventi crioscopici e le loro costanti di cristallizzazione (con M. Padoa) » (st.). — 14) « Ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo (con M. Padoa) » (st.). — 15) « Ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo » (st.). — 16) « Sul comportamento delle soluzioni insolventi dimorfi (con A. Callegari) » (st.). — 17) « Soluzioni solide fra nitro e nitroso-derivati (con A. Callegari) » (st.). — 18) « Sulla configurazione degli stereoisomeri mateici e fumarici e dei corrispondenti composti acetilenici » (st.). — 19) « Ricerche sulle soluzioni solide e sull'isomorfismo (con A Trovanelli) » (st.). — 20) « Studii sulla racemia (con F. Finzi) » (st.). — 21) « Soluzioni solide e isomorfismo » (st.). — 22) « Formazione e scomposizione di cristalli misti fra nitrati e nitriti alcalini (con D. Meneghini) » (st.). — 23) « Sul peso molecolare dell'acqua sciolta in varî solventi (con M. Amadori) » (st.). — 24) « Isomeria chimica e polimorfismo » (st.). — 25) « Soluzioni solide e colloidi » (st.). — 26) « Sulle soluzioni dello jodio in alcuni idrocarburi ciclici (con M. Amadori) » (st.). — 27) « Formazione di soluzioni solide metalliche per diffusione allo stato solido. Nota 1ª (con D. Meneghini) » (st.). — 28) « Formazione di soluzioni solide metalliche per diffusione allo stato solido. Nola 2ª (con D. Meneghini) » (st.). — 29) « Sulla formazione di soluzioni solide fra sali alcalini per diffusione allo stato cristallino (con D. Meneghini) » (st.). — 30) « Sul calore di formazione delle soluzioni solide (con M. Amadori) » (st.).

2. Palladino Pietro. — « I composti chimici nello spazio » (ms.).

3. Peratoner Alberto — 1) « Sulla costituzione degli acidi meconico, comenico e piromeconico » (st.). — 2) « Sopra un prodotto di condensazione dell'alcol acetolico » (st.). — 3) « Sulla tautomeria dell'acido piromeconico » (st.). — 4) « Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine (e Leonardi) » (st.). — 5) « Sopra una pretesa ossima dell'acido meconico » (e Tamburello) » (st.). — 6) « Identità dell'acido laricico di Stenhause col maltolo » (st.). — 7) « Ricerche sull'ossipirone ed alcuni suoi derivati I » (st). — 8) « Sulla costituzione dell'acido comenico (e Palazzo) » (st.). — 9) « Sopra alcuni eteri alchilici dell'acido piromeconico (e Spallino) » (st.). — 10) « Sulla costituzione dell'acido omicomenico (e Castellana » (st.). — 11) « Sulla costituzione del maltolo (e Tamburello) » (st.). — 12) « Sopra alcuni pirideni dell'acido piromeconico e del maltolo » (st.). — 13) « Eterificazione del piridone con diazoidrocarburi grassi (e Azzarello) » (st.). — 14) « Ricerche sull'ossipirone e sopra alcuni suoi derivati » (st.). — 15) « Sull'acido isonitroso-dipiromeconico di Ost » (st.). —

16) « Sull'acido piromecazonico di Ost (e Tamburello) » (st.). — 17) « Sull'acido ossi-piromecazonico di Ost » (st.). — 18) « Sintesi di N-ossi-piridoni (e Tamburello) » (st.). — 19) « Idrazone dell'acido piromeconico e suoi derivati (e Carapello) » (st.). — 20) « Sulla struttura dell'acido bibromocomenico e sulla tautomeria dell'acido comenico (e D'Angelo) » (st.). — 21) « Sintesi dell'acido piromeconico » (st.).

4. Piutti Arnaldo — 1) « Sul potere assorbente per l'aria di alcune varietà di carboni vegetali (e Magli) » (st.). — 2) « L'Elio nell'aria di Napoli e nel Vesuvio » (st.). — 3) « L'Elio nei minerali recenti » (st.). — 4) « Sull'assorbimento dell'Elio nei sali e nei minerali » (st.). — 5) « La ricerca dell'Elio nell'atmosfera » (st.). — 6) « Ricerche sull'Elio » (st.). — 7) « Sulla radioattività dei prodotti della recente eruzione dell'Etna (e Magli) » (st.). — 8) « Sopra i derivati di amminofenoli con anidridi ed acidi bibasici » (st.). — 9) « Sopra alcuni ammidati di acidi ftalici (e Abati) » (st.). — 10) « Sopra modificazioni diversamente colorate di alcuni composti chimici » (st.). — 11) « Sopra alcuni derivati dell'acido 1. 5. amminosalicilico » (st.). — 12) « Azione degli idrati ed alcoolati alcalini sopra immidi non sature » (st.). — 13) « La velocità di addizione del bromo agli acidi itaconico citraconico e meraconico (e Calcagni) » (st.). — 14) « Velocità di addizione del bromo alle immidi di alcuni acidi maleinammici sostituiti » (st.). — 15) « Derivati maleinici e fumarici di P. amminofenoli » (st.). — 16) « Comunicazioni dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologia della R. Università di Napoli diretto dal prof. Piutti » (st.). — 17) « Azione di acidi dicarbonici non saturi sui P.-ammiuofenoli » (st.). — 18) « Sulle cronoisomerie (e De' Conno) » (st.). « Sulla densità delle asparigine » (st.). — 19) « Influenza della temperatura e della concentrazione sul potere rotatorio delle soluzioni acquose ed alcuni asportati monoalcolici » (st.). — 20) « Sull'aria liquida » (st.). — 21) Sull'impiego dell'aria liquida nelle analisi tossicologiche » (st.). — 22) « Sopra gli acidi delle *Bigonia Catalpa* (e Comanducci » (st.). — 23) « Sulla presenza del bismuto nelle piriti di Agordo (e Hoffani) » (st.). — 24) Sull'impiego del tetracloruro di carbonio nella ricerca delle materie coloranti proibite dalla Legge Sanitaria nelle paste alimentari (e Bentivoglio) » (st.). — 25) « Sul formaggio *Moliterno* (e De' Conno) » (st.). — 26) « Analisi chimica dell'acqua termominerale *Grego* (e Comanducci) » (st.). — 27) « Analisi dell'acqua minerale *Apollo* (e D'Emilio) » (st.). — 28) « Analisi chimica dell'acqua minerale da tavola *Rio d'Oliveto* (e Comanducci) » (st.).

Elenco dei lavori presentati al concorso alla Fondazione *Santoro* (1911).

1. Canovetti Cosimo — 1) « Resoconto delle esperienze sulla resistenza dell'aria a Maggio Valsamina » (ms.). — 2) « Propulsori aerei e stato attuale dell'aviazione. Resoconto » (st.).

2. Gorini Costantino — 1) « Studi sulla fabbricazione nazionale dei formaggi grana, ecc. » (st). — 2) « I fermenti selezionati e il trattamento igienico del latte nelle bacinelle contro lo smagrimento e l'inverdimento del Grana » (st.). — 3) « Ricerche batteriologiche sui foraggi conservati nei silos » (st.). — 4) « Le polpe di barbiabietola fresche, conservate e secche in rapporto colla microflora e colla sanità del latte » (st.). — 5) « Ricerche sulla virulenza dei fermenti lattici contenuti nelle dejezioni delle vaccine » (st.) — 6) « Un saggio di penetrazione scientifica nel caseificio alpino » (st.). — 7) « Ricerche sui cocachi acido-presamigeni del formaggio (micrococcus casei acido-proteolyticus I e II) » (st.). — 8) « Il comportamento dei batterî acidopresamigeni (acidoproteolitici) del formaggio di fronte alle temperature basse in rapporto col loro intervento nella maturazione dei formaggi » (st.). — 9) « L'istituzione agraria Ponti e i silò con fermenti selezionati » (st.). — 10) « Per l'applicazione dei fermenti selezionati ai formaggi reggiani e svizzeri » (st.).

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci: Pincherle, Taramelli; dei Corrispondenti: Berlese, Lustig, Pascal, Silvestri; e dei signori: De Toni, Rosèn. Fa poi particolare menzione della pubblicazione della R. Accademia delle scienze di Torino: *Onoranze centenarie internazionali ad Amedeo Avogadro*; dell'*Atlante della Finlandia*, dono della Società geografica finlandese; e del grande *Atlante di spettri tipici* edito per cura della R. Accademia delle scienze di Vienna.

Il Presidente Blaserna fa omaggio, a nome dell'autore, di un interessante trattato del prof. Korn, trattato che riguarda la storia delle esperienze relative alla trasmissione delle immagini a distanza, e le recenti e pratiche applicazioni fatte dallo stesso Korn. Il Presidente presenta inoltre un volume, dandone notizia, degli *Annales* dell'Osservatorio d'astronomia fisica di Parigi, nel quale il Socio straniero H. Deslandres espone le ricerche da lui compiute sull'atmosfera solare.

Il Socio Pirotta offre due Memorie a stampa del prof. Longo: *Su le nespole senza noccioli* e *Sul Ficus Carica*, e ne rileva l'importanza.

E. M.